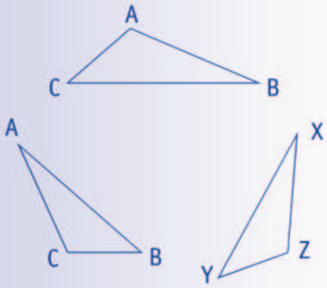
Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Fiche 7.5 Cas d'isométrie des triangles

1) Vocabulaire

L'angle $\hat{A}$ est **compris entre** les côtés [AB] et [AC].
Le côté [BC] est **adjacent** aux angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

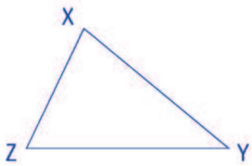
Dans les triangles ABC et XYZ isométriques :
le côté [AB] est homologue au côté [XY] et
l'angle $\hat{C}$ est homologue à l'angle $\hat{Z}$.



Complète les phrases suivantes en utilisant le vocabulaire du pavé théorique.

Dans le triangle XYZ ci-contre :

l'angle $\hat{Y}$ est compris entre les côtés *[XY] et [YZ]* ;
l'angle $\hat{X}$ est compris entre les côtés [XY] et [XZ];
le côté [XY] est adjacent aux angles $\hat{X}$ *et* $\hat{Y}$;
le côté *[YZ]* est adjacent aux angles $\hat{Y}$ et $\hat{Z}$.



Dans tout triangle ABC :

l'angle $\hat{A}$ est compris entre les côtés *[AB] et [AC]* ;
l'angle $\hat{B}$ est compris entre les côtés [AB] et [BC];
le côté [BC] est adjacent aux angles $\hat{B}$ *et* $\hat{C}$;
le côté *[BA]* est adjacent aux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CAB}$.

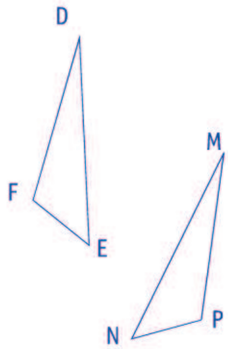
En utilisant le dessin ci-contre, complète les phrases suivantes.

Pour les triangles DEF et MNP :

le côté [EF] est homologue au côté *[NP]* ;
le côté *[DE]* est homologue au côté [MN];
l'angle $\hat{E}$ est homologue à l'angle $\hat{N}$;
l'angle $\hat{F}$ est homologue à l'angle $\hat{P}$.

Si les triangles DEF et MNP sont isométriques,

alors |DE| = | *MN* |, | *FD* | = |PM| et | *FE* | = | *PN* |; et
$|\hat{E}| = |\hat{N}|$, $|\hat{F}| = |\hat{P}|$ et $|\hat{D}| = |\hat{M}|$.

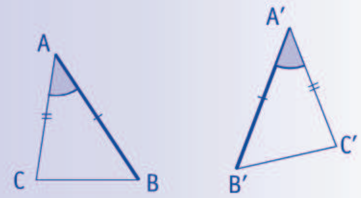


Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

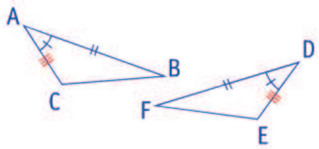
2) Rappel des cas d'isométrie de deux triangles

Si deux triangles ont un angle de même amplitude compris entre des côtés homologues de même longueur, alors ils sont isométriques (**CAC**).

$$\left.\begin{array}{l} |AB| = |A'B'| \\ |\hat{A}| = |\hat{A}'| \\ |AC| = |A'C'| \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \text{ iso } \Delta A'B'C'$$



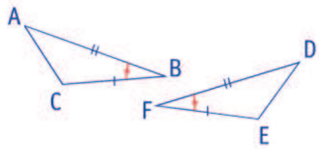
En utilisant le cas d'isométrie ci-dessus et l' (les) égalité(s) déjà connue(s), détermine l'(les) égalité(s) supplémentaire(s) à connaître pour prouver que les triangles sont isométriques.



$|\hat{A}| = |\hat{D}|$

$|AB| = |DF|$

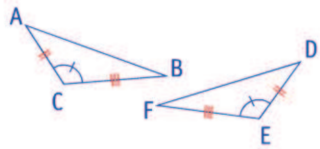
$|$ ***AC*** $| = |$ ***DE*** $|$



$|AB| = |DF|$

$|BC| = |FE|$

$|$ $\hat{B}$ $| = |$ $\hat{F}$ $|$



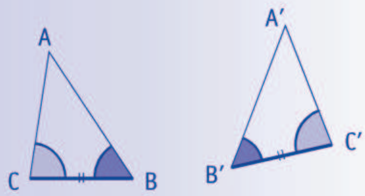
$|\hat{C}| = |\hat{E}|$

$|$ ***AC*** $| = |$ ***DE*** $|$

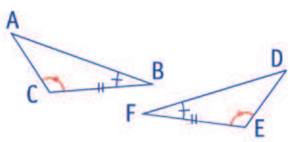
$|$ ***CB*** $| = |$ ***EF*** $|$

Si deux triangles ont un côté de même longueur adjacent à des angles homologues de même amplitude, alors ils sont isométriques (**ACA**).

$$\left.\begin{array}{l} |\hat{B}| = |\hat{B}'| \\ |BC| = |B'C'| \\ |\hat{C}| = |\hat{C}'| \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \text{ iso } \Delta A'B'C'$$



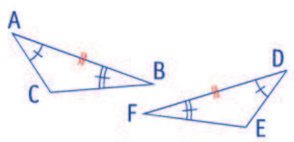
En utilisant le cas d'isométrie ci-dessus et l' (les) égalité(s) déjà connue(s), détermine l'(les) égalité(s) supplémentaire(s) à connaître pour prouver que les triangles sont isométriques.



$|CB| = |EF|$

$|\hat{B}| = |\hat{F}|$

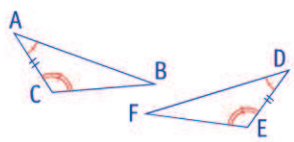
$|$ $\hat{C}$ $| = |$ $\hat{E}$ $|$



$|\hat{A}| = |\hat{D}|$

$|\hat{B}| = |\hat{F}|$

$|$ ***AB*** $| = |$ ***DF*** $|$



$|AC| = |DE|$

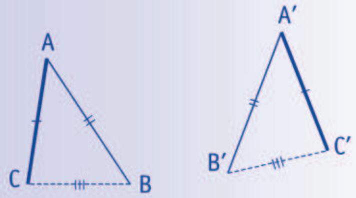
$|$ $\hat{A}$ $| = |$ $\hat{D}$ $|$

$|$ $\hat{C}$ $| = |$ $\hat{E}$ $|$

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Si deux triangles ont leurs côtés homologues de même longueur, alors ils sont isométriques (**CCC**).

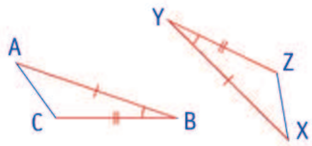
$$\left.\begin{array}{l} |AB| = |A'B'| \\ |BC| = |B'C'| \\ |AC| = |A'C'| \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \text{ iso } \Delta A'B'C'$$



3) Cas d'isométrie : exercices de synthèse

Si tu sais que $|BC| = |YZ|$ et $|\hat{B}| = |\hat{Y}|$, quelle autre égalité dois-tu connaître pour affirmer que les triangles ABC et XYZ sont isométriques (2 solutions différentes) ?

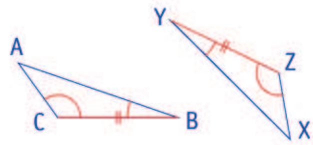
Dessin à compléter (marques)



Égalité supplémentaire

$|AB| = |XY|$

Dessin à compléter (marques)

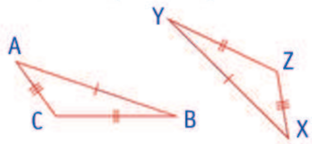


Égalité supplémentaire

$|\hat{C}| = |\hat{Z}|$

Si tu sais que $|CA| = |ZX|$ et $|AB| = |XY|$, quelle autre égalité dois-tu connaître pour affirmer que les triangles ABC et XYZ sont isométriques (2 solutions différentes) ?

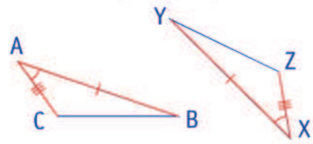
Dessin à compléter (marques)



Égalité supplémentaire

$|CB| = |ZY|$

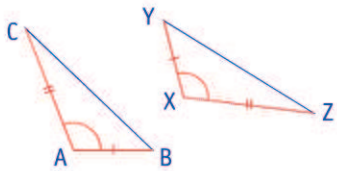
Dessin à compléter (marques)



Égalité supplémentaire

$|\hat{A}| = |\hat{X}|$

Les égalités fournies permettent-elles de conclure que les triangles sont isométriques ?
Si oui, quel cas d'isométrie as-tu reconnu ?

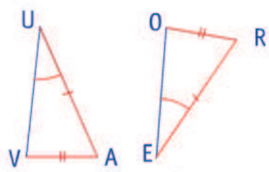


$|AB| = |XY|$

$|AC| = |XZ|$

$|\hat{A}| = |\hat{X}|$

Cas d'isométrie : CAC

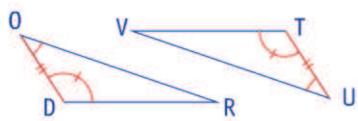


$|\hat{U}| = |\hat{E}|$

$|AU| = |RE|$

$|VA| = |OR|$

Cas d'isométrie : non



$|TU| = |DO|$

$|\hat{U}| = |\hat{O}|$

$|\hat{T}| = |\hat{D}|$

Cas d'isométrie : ACA

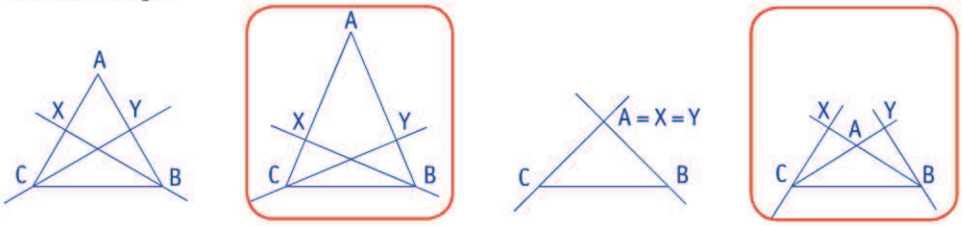
Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Fiche 7.6 Triangles isométriques - Démonstrations

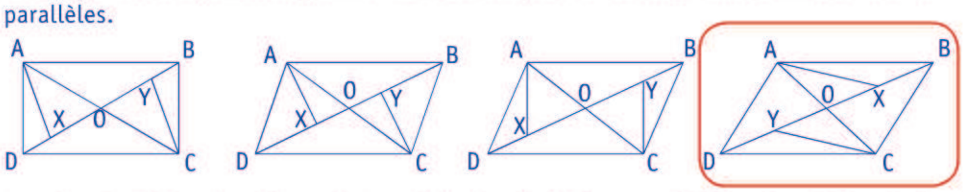
1) Compréhension d'un énoncé

Entoure le(s) dessin(s) qui illustre(nt) le cas général de l'énoncé proposé.

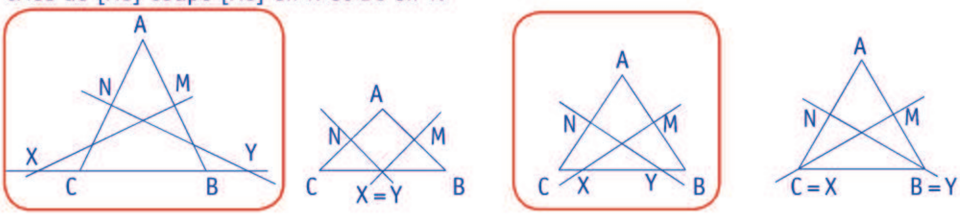
Dans le triangle ABC isocèle en A, les droites BX et CY sont les hauteurs issues des sommets B et C du triangle.



Les diagonales du parallélogramme ABCD se coupent en O et les droites AX et CY sont parallèles.



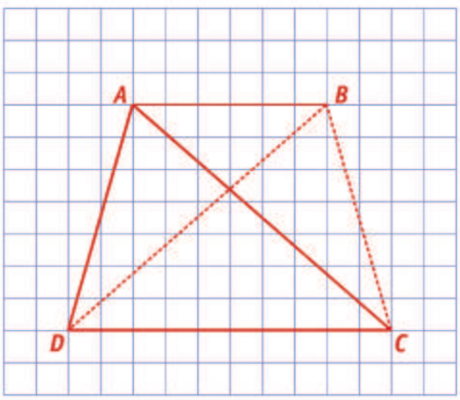
Le triangle ABC est isocèle en A. La médiatrice de [AB] coupe [AB] en M et BC en X; la médiatrice de [AC] coupe [AC] en N et BC en Y.

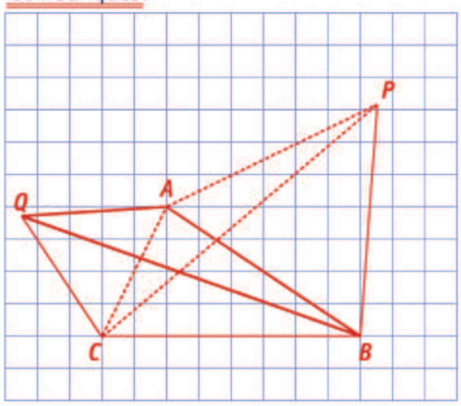


Dans chaque énoncé, souligne les données par un trait et la thèse par un double trait. Ensuite, fais un dessin de la situation.

Dans le trapèze ABCD isocèle (AB // DC), démontre que les triangles DAC et DBC sont isométriques.

Sur les côtés [AC] et [AB] d'un triangle quelconque ABC, on a construit extérieurement les triangles équilatéraux ACQ et ABP. Démontre que les triangles AQB et CAP sont isométriques.



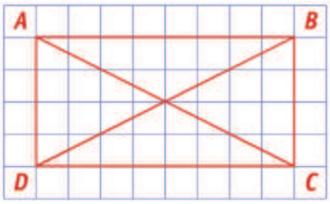


Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Traduis l'énoncé par un dessin, puis écris les données et la thèse.

Démontre que les diagonales d'un rectangle ABCD ont la même longueur.

Dessin



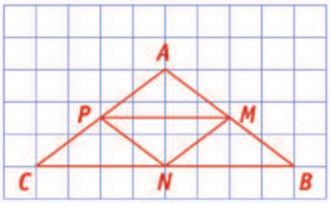
Données *ABCD est un rectangle.*

[AC] et [BD] sont les diagonales du rectangle ABCD.

Thèse *|AC| = |BD|*

Démontre que le triangle dont les sommets sont les milieux M, N et P des côtés d'un triangle ABC isocèle en A est isocèle.

Dessin



Données *ABC est un triangle isocèle en A.*

M est le milieu de [AB].

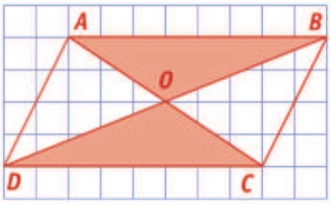
N est le milieu de [BC].

P est le milieu de [AC].

Thèse *MNP est un triangle isocèle en N.*

Démontre que les diagonales d'un parallélogramme ABCD de centre O partagent celui-ci en 4 triangles isométriques 2 à 2.

Dessin



Données *ABCD est un parallélogramme de centre O.*

[AC] et [BD] sont les diagonales du parallélogramme ABCD.

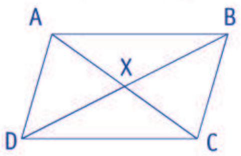
Thèse *Δ AOB est isométrique au Δ COD.*

Δ AOD est isométrique au Δ COB.

2) Justifications

En utilisant les données fournies, justifie l'égalité proposée par une propriété simple.

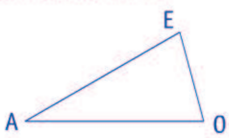
ABCD est un parallélogramme.



|DX| = |XB| car *les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.*

|AD| = |BC| car *les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur.*

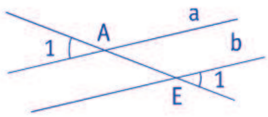
AEO est isocèle en A.



$|\hat{E}| = |\hat{O}|$ car *les angles à la base d'un triangle isocèle ont la même amplitude.*

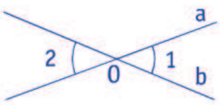
Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

a // b



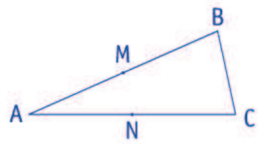
$|\hat{A}_1| = |\hat{E}_1|$ car ***deux angles alternes externes ont la même amplitude.***

a ∦ b



$|\hat{O}_1| = |\hat{O}_2|$ car ***deux angles opposés par le sommet ont la même amplitude.***

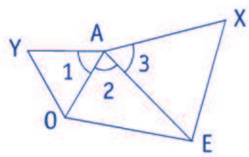
Complète les raisonnements proposés.



ABC est un triangle isocèle en A.
M et N sont les milieux respectifs de [AB] et [AC].
Justifie que |MB| = |NC|.

|AC| = |AB| car ***le triangle ABC est isocèle en A.***

|MB| = |NC| car ***[MB] est la moitié de [AB], [NC] est la moitié de [AC] et que |AC| = |AB|.***



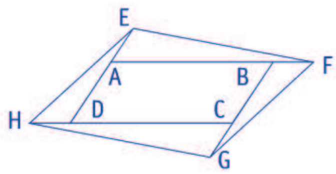
Le triangle AEO est scalène.
Les triangles AEX et AOY sont équilatéraux.
Justifie que $|\widehat{XAO}| = |\widehat{YAE}|$.

$|\widehat{XAE}| = |\widehat{YAO}|$ ou $|\hat{A}_3| = |\hat{A}_1|$ car ***les angles de triangles équilatéraux ont la même amplitude (60°).***

Complète les égalités ci-dessous

$|\widehat{XAO}| = |\hat{A}_3| +$ ***$|\hat{A}_2|$*** et $|\widehat{YAE}| = |\hat{A}_1| +$ ***$|\hat{A}_2|$***

Conclusion ***$|\widehat{XAO}| = |\widehat{YAE}|$***



ABCD est un parallélogramme.
|AE| = |BF| = |CG| = |DH|
Justifie que |DE| = |BG|.

|DA| = |BC| car ***les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur.***

Complète les égalités ci-dessous

|DE| = |DA| + ***|AE|*** et |BG| = |BC| + ***|CG|***

Conclusion ***|DE| = |BG|***

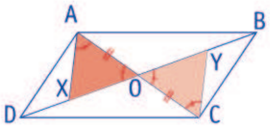
Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

3) Démonstrations structurées

Complète les démonstrations structurées proposées ci-dessous.

Dans le parallélogramme ABCD, on sait que CY // AX. Démontre que |OX| = |OY|.

Démonstration



Données *ABCD est un parallélogramme de centre O.*

CY // AX

Thèse *|OX| = |OY|*

Colorie dans des couleurs différentes les triangles AOX et COY.

(1) |AO| = |OC|, car *les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.*

(2) | $\widehat{AOX}$ | = | $\widehat{COY}$ |, car *deux angles opposés par le sommet ont la même amplitude.*

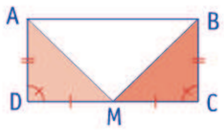
(3) | $\widehat{XAO}$ | = | $\widehat{YCO}$ |, car *deux angles alternes internes ont la même amplitude.*

(1), (2) et (3) ⇒ Δ *AOX* iso Δ *COY* (cas d'isométrie CCC, ACA ou CAC)
entoure le bon cas

⇒ | *OX* | = | *OY* |

Dans le rectangle ABCD, on note M le milieu de [DC]. Démontre que le triangle AMB est isocèle.

Démonstration



Données *ABCD est un rectangle.*

M est le milieu de [DC].

Thèse *AMB est un triangle isocèle en M.*

Colorie dans des couleurs différentes les triangles ADM et BCM.

(1) $|\hat{D}| = |\hat{C}|$, car *les angles d'un rectangle ont la même amplitude (90°).*

(2) | *AD* | = | *BC* |, car *les côtés opposés d'un rectangle ont la même longueur.*

(3) | *DM* | = | *MC* |, car *le point M est le milieu de [DC].*

(1), (2) et (3) ⇒ Δ *ADM* iso Δ *BCM* (cas d'isométrie CCC, ACA ou CAC)
entoure le bon cas

⇒ | *AM* | = | *BM* |

⇒ Δ AMB est *est un triangle isocèle en M.*

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Fiche 7.7 Cas de similitude de triangles

1) Triangles semblables et rapport de similitude

Si deux triangles sont **semblables**, alors leurs **angles** homologues sont de **même amplitude** et leurs **côtés** homologues sont de **longueurs proportionnelles**.

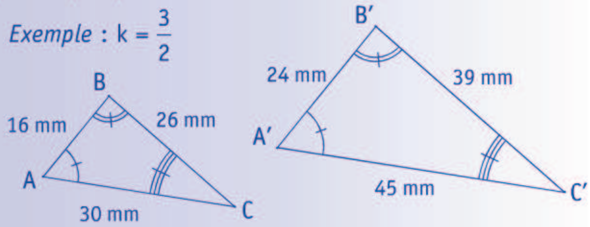
$|\hat{A}| = |\hat{A}'|$, $|\hat{B}| = |\hat{B}'|$ et $|\hat{C}| = |\hat{C}'|$

et

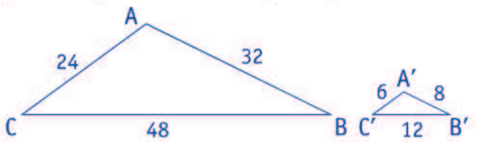
$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = k$$

k est le rapport de similitude.

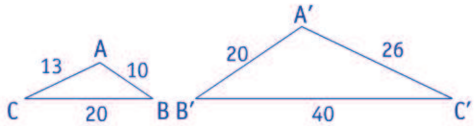
Exemple : $k = \frac{3}{2}$



Les triangles ABC et A'B'C' sont semblables. Complète l'égalité entre les rapports des longueurs (en mm) des segments homologues pour déterminer le rapport de similitude.

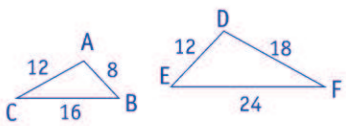


$$\frac{8}{32} = \frac{6}{24} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

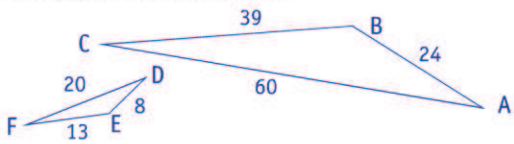


$$\frac{20}{10} = \frac{26}{13} = \frac{40}{20} = \frac{2}{1} = 2$$

Les triangles ABC et DEF sont semblables. Complète l'égalité entre les rapports des longueurs (en mm) des segments homologues en connaissant le rapport de similitude.



$$\frac{18}{12} = \frac{24}{16} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

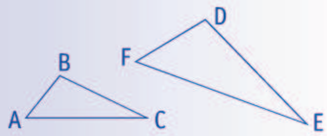


$$\frac{13}{39} = \frac{8}{24} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

Les triangles ABC et DEF sont **semblables.**

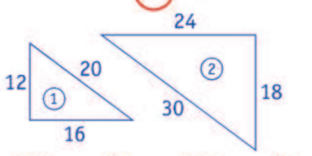
Le **rapport** de similitude pour passer de ABC à DEF est **supérieur à 1**, car DEF est un **agrandissement** de ABC.

Le **rapport** de similitude pour passer de DEF à ABC est **inférieur à 1**, car ABC est une **réduction** de DEF.



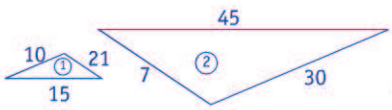
Dans chaque cas, le triangle 2 est-il un agrandissement (A) ou une réduction (R) du triangle 1 ? Ensuite, détermine le rapport de simitude.

A - R



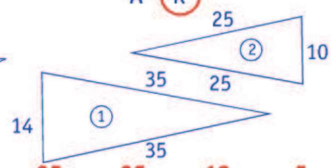
$$\frac{24}{16} = \frac{30}{20} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

A - R



$$\frac{45}{15} = \frac{30}{10} = \frac{21}{7} = 3$$

A - R



$$\frac{25}{35} = \frac{25}{35} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$