Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Réduis les expressions suivantes en utilisant la technique expliquée ci-dessus.

$(ab)^{-4} = a^{-4} \cdot b^{-4} = \frac{1}{a^4b^4}$

$(3a^{-2})^3 = 3^3 \cdot (a^{-2})^3 = 27 \cdot a^{-6} = \frac{27}{a^6}$

$(2a)^{-3} = 2^{-3} \cdot a^{-3} = \frac{1}{2^3a^3} = \frac{1}{8a^3}$

$(-5a^{-3})^{-2} = (-5)^{-2} \cdot (a^{-3})^{-2} = \frac{a^6}{(-5)^2} = \frac{a^6}{25}$

$(a^3b)^{-2} = (a^3)^{-2} \cdot b^{-2} = a^{-6} \cdot b^{-2} = \frac{1}{a^6b^2}$

$(-4a^5)^{-3} = (-4)^{-3} \cdot (a^5)^{-3} = \frac{a^{-15}}{(-4)^3} = \frac{-1}{64a^{15}}$

6) Puissance d'une fraction

Pour élever une fraction à une puissance, on peut :
- élever chaque terme de la fraction à cette puissance;
- transformer la fraction en un produit.

Exemple : $\left(\frac{a^{-4}}{b^2}\right)^{-5} = (a^{-4} \cdot b^{-2})^{-5} = (a^{-4})^{-5} \cdot (b^{-2})^{-5} = a^{20}b^{10}$ ou $\left(\frac{a^{-4}}{b^2}\right)^{-5} = \frac{(a^{-4})^{-5}}{(b^2)^{-5}} = \frac{a^{20}}{b^{-10}} = a^{20}b^{10}$

Réduis les expressions suivantes en utilisant une des deux techniques expliquées ci-dessus.

$\left(\frac{x^2}{y^4}\right)^{-2} = (x^2 \cdot y^{-4})^{-2} = (x^2)^{-2} \cdot (y^{-4})^{-2} = x^{-4}y^8 = \frac{y^8}{x^4}$

$\left(\frac{x^{-4}}{y^5}\right)^{-5} = (x^{-4} \cdot y^{-5})^{-5} = (x^{-4})^{-5} \cdot (y^{-5})^{-5} = x^{20}y^{25}$

$\left(\frac{a^4}{b^{-2}}\right)^{-4} = (a^4 \cdot b^2)^{-4} = (a^4)^{-4} \cdot (b^2)^{-4} = a^{-16}b^{-8} = \frac{1}{a^{16}b^8}$

$\left(\frac{2x^2}{y^3}\right)^{-3} = (2x^2y^{-3})^{-3} = 2^{-3}(x^2)^{-3}(y^{-3})^{-3} = \frac{x^{-6}y^9}{2^3} = \frac{y^9}{8x^6}$

$\left(\frac{3a^{-3}}{b^{-4}}\right)^{-2} = (3a^{-3}b^4)^{-2} = 3^{-2}(a^{-3})^{-2}(b^4)^{-2} = \frac{a^6b^{-8}}{3^2} = \frac{a^6}{9b^8}$

7) Exercices de synthèse

Entoure la bonne réponse.

$3^{-2} =$	9	-9	$\boxed{\frac{1}{9}}$	$a^3 \cdot a^{-3} =$	0	$\boxed{1}$	a^{-9}
$(-3)^2 =$	$\boxed{9}$	-9	$\frac{1}{9}$	$(a^{-2})^3 =$	a^{-5}	$\boxed{a^{-6}}$	a^{-8}
$(-3)^{-2} =$	9	-9	$\boxed{\frac{1}{9}}$	$2ab^{-1} =$	$\frac{1}{2ab}$	$\frac{2}{ab}$	$\boxed{\frac{2a}{b}}$
$a^{-5} =$	$-a^5$	$\boxed{\frac{1}{a^5}}$	$\frac{-1}{a^5}$	$(-5a)^{-2} =$	$25a^2$	$\boxed{\frac{1}{25a^2}}$	$\frac{25}{a^2}$
$(-a)^{-3} =$	a^3	$\frac{1}{a^3}$	$\boxed{\frac{-1}{a^3}}$	$\left(\frac{a}{b^{-1}}\right)^{-2} =$	$\boxed{\frac{1}{a^2b^2}}$	$\frac{b^2}{a^2}$	$\frac{b^2}{a^{-2}}$
$(2a)^{-2} =$	$-4a^2$	$\boxed{\frac{1}{4a^2}}$	$\frac{-4}{a^2}$	$a^6 \cdot a =$	$2a^6$	$\boxed{a^7}$	a^6

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Reconnais la(les) propriété(s) qu'il faut utiliser, puis réduis en notant éventuellement les détails de ton raisonnement.

1. Produit de puissances de même base
2. Quotient de puissances de même base
3. Puissance d'une puissance
4. Puissance d'un produit
5. Puissance d'une fraction

1 $a^{-7} \cdot a^{3} = a^{-4} = \dfrac{1}{a^{4}}$

3 $(a^{5})^{-2} = a^{-10} = \dfrac{1}{a^{10}}$

2-1 $\dfrac{2a^{6}}{a^{-2}} = 2a^{6} \cdot a^{2} = 2a^{8}$

4 $(-4a)^{2} = (-4)^{2} \cdot a^{2} = 16a^{2}$

4-3 $(ab^{-2})^{-4} = a^{-4}b^{8} = \dfrac{b^{8}}{a^{4}}$

4-3 $(4a^{-2})^{-3} = 4^{-3}a^{6} = \dfrac{a^{6}}{4^{3}} = \dfrac{a^{6}}{64}$

1 $-5a^{2} \cdot 2a^{-5} = (-10)\ a^{-3} = \dfrac{-10}{a^{3}}$

2-1-3 $\left(\dfrac{a^{-2}}{a^{3}}\right)^{-3} = (a^{-2} \cdot a^{-3})^{-3} = (a^{-5})^{-3} = a^{15}$

5-3 $\left(\dfrac{a^{-2}}{b^{3}}\right)^{-2} = (a^{-2} \cdot b^{-3})^{-2} = a^{4}b^{6}$

1 $4a^{-2} \cdot 2a^{-7} = 8 \cdot a^{-9} = \dfrac{8}{a^{9}}$

Complète.

$a^{-2} \cdot a^{-4} = a^{-6}$ $\qquad \dfrac{a^{2}}{a^{8}} = a^{-6}$ $\qquad (5a^{-3})^{2} = \dfrac{25}{a^{6}}$ $\qquad a^{2} \cdot b^{3} = \dfrac{1}{a^{-2}b^{-3}}$

$(a^{-2})^{3} = a^{-6}$ $\qquad (a \cdot b)^{-2} = \dfrac{1}{a^{2}b^{2}}$ $\qquad \left(\dfrac{a^{2}}{a^{-1}}\right)^{2} = a^{6}$ $\qquad (3\ a^{-3}\ b^{4})^{-2} = \dfrac{a^{6}}{9b^{8}}$

$(a^{3})^{-2} = \dfrac{1}{a^{6}}$ $\qquad (a \cdot b^{-2})^{-2} = \dfrac{b^{4}}{a^{2}}$ $\qquad \left(\dfrac{a^{2}}{b^{3}}\right)^{-3} = \dfrac{b^{9}}{a^{6}}$ $\qquad (a^{2}b^{-3})^{-2} = \dfrac{b^{6}}{a^{4}}$

Réduis les expressions ci-dessous et écris ta réponse finale en n'utilisant que des exposants positifs.

$\left(\dfrac{3b^{-2}}{a^{-4}}\right)^{-2} = (3 \cdot a^{4} \cdot b^{-2})^{-2} = 3^{-2} \cdot (a^{4})^{-2} \cdot (b^{-2})^{-2} = \dfrac{a^{-8}b^{4}}{3^{2}} = \dfrac{b^{4}}{9a^{8}}$

$\left(\dfrac{2a^{-2}}{a^{4}}\right)^{-4} = (2a^{-2} \cdot a^{-4})^{-4} = (2a^{-6})^{-4} = 2^{-4} \cdot (a^{-6})^{-4} = \dfrac{a^{24}}{2^{4}} = \dfrac{a^{24}}{16}$

$3a \cdot (-2a)^{-2} = 3a \cdot (-2)^{-2} \cdot a^{-2} = \dfrac{3a^{-1}}{(-2)^{2}} = \dfrac{3}{4a}$

$(-4a^{-2}b^{3})^{-3} = (-4)^{-3} \cdot (a^{-2})^{-3} \cdot (b^{3})^{-3} = \dfrac{a^{6}b^{-9}}{(-4)^{3}} = \dfrac{-a^{6}}{64b^{9}}$

$\left(\dfrac{2x^{2}}{y^{-5}}\right)^{-3} = (2 \cdot x^{2} \cdot y^{5})^{-3} = 2^{-3} \cdot (x^{2})^{-3} \cdot (y^{5})^{-3} = \dfrac{x^{-6}y^{-15}}{2^{3}} = \dfrac{1}{8x^{6}y^{15}}$

$(3a^{2})^{-2} \cdot (ab)^{3} = 3^{-2} \cdot (a^{2})^{-2} \cdot a^{3} \cdot b^{3} = \dfrac{a^{-4} \cdot a^{3} \cdot b^{3}}{3^{2}} = \dfrac{a^{-1} \cdot b^{3}}{9} = \dfrac{b^{3}}{9a}$

$-5(a^{-2})^{3} \cdot (2a)^{-2} = -5 \cdot a^{-6} \cdot 2^{-2} \cdot a^{-2} = \dfrac{-5 \cdot a^{-8}}{2^{2}} = \dfrac{-5}{4a^{8}}$

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Section 4 • Polynômes

Fiche 4.1 Sommes et produits de polynômes

1) Vocabulaire

Réponds aux questions relatives au polynôme $A(x) = 3x^4 - 2x - 4x^5 + 8 - x^2$.

- Ce polynôme est-il ordonné ? ***Non*** Si non, ordonne-le par puissances décroissantes de x : ***$-4x^5 + 3x^4 - x^2 - 2x + 8$***
- Ce polynôme ne possède plus de termes semblables ; il est ***réduit.***
- Ce polynôme est-il complet ? ***Non*** Quel est son degré ? ***5***
- Comment s'appelle x ? ***La variable***
- Que représente le terme 8 ? ***Le terme indépendant***
- Que représente le nombre −4 figurant devant x^5 ? ***Le coefficient du terme de degré 5.***

Associe chaque polynôme à ses caractéristiques.

$-8 - 5x^2$	Binôme du second degré
$3x + 2x^2 - 5$	Trinôme complet et ordonné de degré 2
$3x^3 + 5x^2 - x + 3$	Trinôme de degré 2, complet et dont la valeur numérique pour x = 0 est −5
$2x^2 - 2x + 3$	Polynôme de degré 3, complet mais pas ordonné
$-2x^3 - 3$	Polynôme de degré 3 et de terme indépendant 3
$2x^3 - 1 - 3x + 2x^2$	Binôme de degré 3 et ordonné

Ordonne les polynômes proposés, détermine leur degré et précise s'ils sont complets.

Polynôme	Polynôme ordonné	Degré	Complet / Incomplet
$x^3 + 2x^2 - 6x + 5$	***$x^3 + 2x^2 - 6x + 5$***	***3***	***Complet***
$-8x + 5x^2 - 4x^3$	***$-4x^3 + 5x^2 - 8x$***	***3***	***Incomplet***
$x + 2x^4 - 6x^2 + 7$	***$2x^4 - 6x^2 + x + 7$***	***4***	***Incomplet***
$1 - 2x + 3x^2$	***$3x^2 - 2x + 1$***	***2***	***Complet***
$6x + 4 - 2x^3 + 5x^2$	***$-2x^3 + 5x^2 + 6x + 4$***	***3***	***Complet***
$5 - x - x^2 + 3x^4$	***$3x^4 - x^2 - x + 5$***	***4***	***Incomplet***

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Après avoir souligné les termes semblables, réduis les polynômes suivants et ordonne-les par puissances décroissantes de x.

$-9x^2 \cancel{+ 4x} + 7x^2 \cancel{- 4x} + 5 - x =$ $-2x^2 - x + 5$

$5x - 5x^4 - 4x^2 + 3x + 8x^4 - x^2 =$ $3x^4 - 5x^2 + 8x$

$x^3 + 2x^2 + 3x^3 \cancel{- 5} - 4x^2 + 5x^4 \cancel{+ 5} =$ $5x^4 + 4x^3 - 2x^2$

$3x^3 \cancel{- 4x^2} + 5x^3 - 2x \cancel{+ 4x^2} - 3 + 6x^5 =$ $6x^5 + 8x^3 - 2x - 3$

$5x^3 - 3x^4 - 2x^3 + 4x^4 - x^4 - 3x^3 + 5x =$ $5x$

2) Somme algébrique de polynômes

Pour effectuer la somme algébrique de plusieurs polynômes, on applique la règle de **suppression des parenthèses** et on **réduit les termes semblables**.

Exemple

Si $A(x) = 2x^2 - 3$, $B(x) = 3x^3 + x^2 - 2x + 1$ et $C(x) = 4x^2 + 2x - 5$,

alors $A(x) + B(x) - C(x)$

$= (2x^2 - 3) + (3x^3 + x^2 - 2x + 1) - (4x^2 + 2x - 5)$

$= 2x^2 - 3 + 3x^3 + x^2 - 2x + 1 - 4x^2 - 2x + 5$

$= 3x^3 - x^2 - 4x + 3$

Voici des polynômes en x.

$A(x) = 3x^2 - 1$ $B(x) = 2x^3 + x^2 + 3$ $C(x) = -x^4 - 2x^3 - 2$ $D(x) = x^4 - 3x^2 + x^3$

Effectue et donne le degré du polynôme obtenu.

$B(x) + C(x) = (2x^3 + x^2 + 3) + (-x^4 - 2x^3 - 2)$

$= \cancel{2x^3} + x^2 + 3 - x^4 \cancel{- 2x^3} - 2$

$= -x^4 + x^2 + 1$ degré : 4

$A(x) - B(x) = (3x^2 - 1) - (2x^3 + x^2 + 3)$

$= 3x^2 - 1 - 2x^3 - x^2 - 3$

$= -2x^3 + 2x^2 - 4$ degré : 3

$D(x) - C(x) = (x^4 - 3x^2 + x^3) - (-x^4 - 2x^3 - 2)$

$= x^4 - 3x^2 + x^3 + x^4 + 2x^3 + 2$

$= 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2$ degré : 4

$A(x) + B(x) + C(x) = (3x^2 - 1) + (2x^3 + x^2 + 3) + (-x^4 - 2x^3 - 2)$

$= 3x^2 - 1 \cancel{+ 2x^3} + x^2 + 3 - x^4 \cancel{- 2x^3} - 2$

$= -x^4 + 4x^2$ degré : 4

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

3) Produit algébrique de polynômes

Pour effectuer le produit d'un polynôme par un monôme, on applique la **distributivité simple**.

Exemple

Si $A(x) = 3x^2$ et $B(x) = 2x^3 - x + 3$,

alors $A(x) \,.\, B(x) = 3x^2 \,.\, (2x^3 - x + 3)$

$= 3x^2 \,.\, 2x^3 + 3x^2 \,.\, (-x) + 3x^2 \,.\, 3$

$= 6x^5 - 3x^3 + 9x^2$

Pour effectuer le produit de deux polynômes, on applique la **distributivité double**.

Exemple

Si $A(x) = x - 2$ et $B(x) = x^2 + 5x - 1$,

alors $A(x) \,.\, B(x) = (x - 2) \,.\, (x^2 + 5x - 1)$

$= x \,.\, x^2 + x \,.\, 5x + x \,.\, (-1) + (-2) \,.\, x^2 + (-2) \,.\, 5x + (-2) \,.\, (-1)$

$= x^3 + 5x^2 - x - 2x^2 - 10x + 2$

$= x^3 + 3x^2 - 11x + 2$

En suivant la démarche des exemples ci-dessus, effectue et donne le degré du polynôme obtenu.

$2x^3 \,.\, (5x + 2) = 2x^3 \,.\, 5x + 2x^3 \,.\, 2$

$= 10x^4 + 4x^3$ degré : 4

$4x^2 \,.\, (2x^3 - 3x + 2) = 4x^2 \,.\, 2x^3 + 4x^2 \,.\, (-3x) + 4x^2 \,.\, 2$

$= 8x^5 - 12x^3 + 8x^2$ degré : 5

$(-4x^2 + 5x - 1) \,.\, 3x = 3x \,.\, (-4x^2) + 3x \,.\, 5x + 3x \,.\, (-1)$

$= -12x^3 + 15x^2 - 3x$ degré : 3

$(x + 2) \,.\, (3x^2 - x + 4) = x \,.\, 3x^2 + x \,.\, (-x) + x \,.\, 4 + 2 \,.\, 3x^2 + 2 \,.\, (-x) + 2 \,.\, 4$

$= 3x^3 - x^2 + 4x + 6x^2 - 2x + 8$

$= 3x^3 + 5x^2 + 2x + 8$ degré : 3

Effectue rapidement.

$3x^3 \,.\, (4x^3 - 2x^2 - 3x + 1) = 12x^6 - 6x^5 - 9x^4 + 3x^3$

$-2x^3 \,.\, (-x^2 + 3x - 4) = 2x^5 - 6x^4 + 8x^3$

$(x^4 - 2x^2 + 3x + 2) \,.\, (-4x) = -4x^5 + 8x^3 - 12x^2 - 8x$

$(3x^2 - 1) \,.\, (2x^3 - 3x - 1) = 6x^5 - 9x^3 - 3x^2 - 2x^3 + 3x + 1$

$= 6x^5 - 11x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

$(x^3 - 3x^2 - 2x + 1) \,.\, (x^3 - 1) = x^6 - x^3 - 3x^5 + 3x^2 - 2x^4 + 2x + x^3 - 1$

$= x^6 - 3x^5 - 2x^4 + 3x^2 + 2x - 1$

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

4) Degré d'une somme de polynômes

Le degré d'une **somme** de plusieurs polynômes est **égal** ou **inférieur** au degré de celui qui a le degré **le plus élevé**.

Exemples

$A(x) = 6x^3 - 2x + 5$	$d°A(x) = 3$	$A(x) = 2x^3 - 4x - 3$	$d°A(x) = 3$
$B(x) = -4x^3 + 3x - 2$	$d°B(x) = 3$	$B(x) = -2x^3 + x^2 - 1$	$d°B(x) = 3$
$A(x) + B(x) = 2x^3 + x + 3$	$d°(A(x) + B(x)) = 3$	$A(x) + B(x) = x^2 - 4x - 4$	$d°(A(x) + B(x)) = 2$
$A(x) = x^3 - 3x$	$d°A(x) = 3$	$A(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 7$	$d°A(x) = 3$
$B(x) = 5x^2 + 2x$	$d°B(x) = 2$	$B(x) = -2x^3 + x^2 - 2x$	$d°B(x) = 3$
$A(x) + B(x) = x^3 + 5x^2 - x$	$d°(A(x) + B(x)) = 3$	$A(x) + B(x) = x - 7$	$d°(A(x) + B(x)) = 1$

Dans chaque cas, précise le degré de la somme des polynômes A(x) et B(x), sans avoir calculé celle-ci.

$A(x)$	$B(x)$	$d°(A(x) + B(x))$
$3x^6 - 2x^4 + 3x + 5$	$5x^4 + 4x^2 - 3x + 1$	***6***
$5x^3 + 2x^2 + x - 9$	$-4x^3 + 3x + 6$	***3***
$2x^4 - 7x^2 + 3x + 3$	$-2x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 6x - 1$	***3***
$2x^2 + 4x + 7$	$3x^5 - 2x^2 + x - 4$	***5***
$-x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x - 8$	$x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 8$	***1***

Complète.

Si $d°A(x) = 4$ et $d°B(x) = 3$, alors $d°(A(x) + B(x))$ $= 4$	Si $d°A(x) = 3$ et $d°B(x) = 3$, alors $d°(A(x) + B(x))$ $\leqslant 3$	Si $d°A(x) = 2$ et $d°B(x) = 5$, alors $d°(A(x) + B(x))$ $= 5$
Si $d°A(x) = 4$ et $d°B(x) = 6$, alors $d°(A(x) + B(x))$ $= 6$	Si $d°A(x) = a+2$ et $d°B(x) = a$, alors $d°(A(x) + B(x))$ $= a+2$	Si $d°A(x) = a$ et $d°B(x) = a$ alors $d°(A(x) + B(x))$ $\leqslant a$
Si $d°A(x) = a$ et $d°B(x) = a+3$, alors $d°(A(x) + B(x))$ $= a+3$	Si $d°A(x) = a-2$ et $d°B(x) = a$, alors $d°(A(x) + B(x))$ $= a$	Si $d°A(x) = a-1$ et $d°B(x) = a-2$, alors $d°(A(x) + B(x))$ $= a-1$

5) Degré d'un produit de polynômes

Le degré d'un **produit** de plusieurs polynômes est égal à la **somme** des degrés de ceux-ci.

Exemples

$A(x) = 2x^2 - 3x + 1$ $\quad d°A(x) = 2$
$B(x) = 4x$ $\quad d°B(x) = 1$
$A(x) \,.\, B(x) = 8x^3 - 12x^2 + 4x$ $\quad d°(A(x) \,.\, B(x)) = 3$

$A(x) = 3x^2 + 2$ — $d°A(x) = 2$
$B(x) = x^2 - 2x + 1$ — $d°B(x) = 2$
$A(x) \cdot B(x) = 3x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 4x + 2$ — $d°(A(x) \cdot B(x)) = 4$

$A(x) = x^3 + 2x + 1$ — $d°A(x) = 3$
$B(x) = 2x^2 - 3$ — $d°B(x) = 2$
$A(x) \cdot B(x) = 6x^5 + x^3 + 2x^2 - 6x - 3$ — $d°(A(x) \cdot B(x)) = 5$

Dans chaque cas, précise le degré du produit des polynômes A(x) et B(x), sans avoir calculé celui-ci.

A(x)	B(x)	d°(A(x) . B(x))
$3x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1$	$3x^5$	*9*
$-4x^2 + 3x + 7$	$2x^5 + 2x^4 - 4x^2 + x + 8$	*7*
$7x^3 - 3x^2 - 2x + 10$	$-7x^3 + 3x^2 + 2x - 10$	*6*
$2x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 3x - 1$	$2x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 3x - 1$	*8*

Complète.

Si $d°A(x) = 2$ et $d°B(x) = 3$, alors $d°(A(x) \cdot B(x))$ *= 5*

Si $d°A(x) = 4$ et $d°B(x) = 2$, alors $d°(A(x) \cdot B(x))$ *= 6*

Si $d°A(x) = 3$ et $d°B(x) = 3$, alors $d°(A(x) \cdot B(x))$ *= 6*

Si $d°A(x) = 5$ et $d°B(x) = 1$, alors $d°(A(x) \cdot B(x))$ *= 6*

Si $d°A(x) = a$ et $d°B(x) = a$, alors $d°(A(x) \cdot B(x))$ *= 2a*

Si $d°A(x) = a-1$ et $d°B(x) = a$, alors $d°(A(x) \cdot B(x))$ *= 2a–1*

Si $d°A(x) = a$ et $d°B(x) = b$, alors $d°(A(x) \cdot B(x))$ *= a+b*

Si $d°A(x) = a+1$ et $d°B(x) = a$, alors $d°(A(x) \cdot B(x))$ *= 2a+1*

Si $d°A(x) = a-2$ et $d°B(x) = a+2$, alors $d°(A(x) \cdot B(x))$ *= 2a*

Dans chaque cas, précise le degré de la somme et du produit des polynômes A(x) et B(x), sans avoir calculé ceux-ci.

A(x)	B(x)	d°(A(x) + B(x))	d°(A(x) . B(x))
$2x^4 - x^3 + 3x^2 - x - 2$	$-2x^2 + 3x - 1$	*4*	*6*
$-2x^3 + x^2 - 4x + 5$	$2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$	*2*	*6*
$-2x^5 - 2x^4 + 4x^2 + 7x - 8$	$2x^5 + 2x^4 - 4x^2 + x + 8$	*1*	*10*
$4x^3 + 8x^2 - 3x + 1$	$-4x^4 - 8x^3 + 3x - 1$	*4*	*7*
$9x^3 - 4x^2 - 3x - 1$	$4x^2 - 2x + 3$	*3*	*5*
$3x^3 + 2x^2 - 5x - 1$	$5x^3 + 1$	*3*	*6*

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Fiche 4.2 Produits remarquables

1) Carré d'un binôme

Le **carré** d'un **binôme** est égal à la somme
du **carré** du **premier** terme,
du **double produit** des **deux termes** et
du **carré** du **second** terme.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Exemples :

$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \,.\, x \,.\, 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

$(2x - 1)^2 = (2x + (-1))^2 = (2x)^2 + 2 \,.\, 2x \,.\, (-1) + (-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

$(-x + 5)^2 = (-x)^2 + 2 \,.\, (-x) \,.\, 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

$(-3x - 2)^2 = (-3x + (-2))^2 = (-3x)^2 + 2 \,.\, (-3x) \,.\, (-2) + (-2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

Remarques

Dans le développement du carré d'un binôme

les carrés sont toujours positifs et

le double produit est positif si les deux termes sont de même signe et négatif si les termes sont de signes différents.

Écris les expressions ci-dessous sous la forme d'une somme au carré.

$(x - 6)^2 = (x + (-6))^2$	$(-x - 7)^2 = (-x + (-7))^2$	$(4x - 3y)^2 = (4x + (-3y))^2$
$(-5x - 2y)^2 = (-5x + (-2y))^2$	$(3x - 4)^2 = (3x + (-4))^2$	$(-2x - 5y)^2 = (-2x + (-5y))^2$

Complète les développements ci-dessous.

$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \,.\, (2x) \,.\, (3) + (3)^2$
$= 4x^2 + 12x + 9$

$(x - 2y)^2 = (x)^2 + 2 \,.\, (x) \,.\, (-2y) + (-2y)^2$
$= x^2 - 4xy + 4y^2$

$(-x + 3y)^2 = (-x)^2 + 2 \,.\, (-x) \,.\, (3y) + (3y)^2$
$= x^2 - 6xy + 9y^2$

$(-5 - 2x)^2 = (-5)^2 + 2 \,.\, (-5) \,.\, (-2x) + (-2x)^2$
$= 25 + 20x + 4x^2$

Utilise la même démarche pour développer les carrés ci-dessous.

$(x + 8)^2 = x^2 + 2 \,.\, x \,.\, 8 + 8^2 \quad = x^2 + 16x + 64$

$(3x - 5)^2 = (3x)^2 + 2 \,.\, 3x \,.\, (-5) + (-5)^2 \quad = 9x^2 - 30x + 25$

$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \,.\, 2x \,.\, 3y + (3y)^2 \quad = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

$(-3x + 2)^2 = (-3x)^2 + 2 \,.\, (-3x) \,.\, 2 + 2^2 \quad = 9x^2 - 12x + 4$

$(-6 - 2x)^2 = (-6)^2 + 2 \,.\, (-6) \,.\, (-2x) + (-2x)^2 \quad = 36 + 24x + 4x^2$

$(5x^2 - 3x)^2 = (5x^2)^2 + 2 \,.\, 5x^2 \,.\, (-3x) + (-3x)^2 \quad = 25x^4 - 30x^3 + 9x^2$

$(4x^2 + 2y^3)^2 = (4x^2)^2 + 2 \,.\, 4x^2 \,.\, 2y^3 + (2y^3)^2 \quad = 16x^4 + 16x^2y^3 + 4y^6$

$(-2x^3 + y)^2 = (-2x^3)^2 + 2 \,.\, (-2x^3) \,.\, y + y^2 \quad = 4x^6 - 4x^3y + y^2$

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Pour chaque binôme au carré, entoure le double produit des deux termes.

$(2x + 3y)^2$	$10xy$	$12xy$	$6xy$	$(x^2 + 3x)^2$	$3x^3$	$6x^2$	$6x^3$
$(5x + 1)^2$	$10x$	$12x$	$6x$	$(2x^2 + x^3)^2$	$2x^5$	$4x^6$	$4x^5$

Applique la formule du carré d'un binôme, sans écrire les détails de la démarche.

$(4x - 9)^2 =$ ***$16x^2 - 72x + 81$***

$(5x + 2y)^2 =$ ***$25x^2 + 20xy + 4y^2$***

$(-2x - 7y)^2 =$ ***$4x^2 + 28xy + 49y^2$***

$(-3 + 4x)^2 =$ ***$9 - 24x + 16x^2$***

$(3x^2 + 4x)^2 =$ ***$9x^4 + 24x^3 + 16x^2$***

$(-x^3 + 4x^2)^2 =$ ***$x^6 - 8x^5 + 16x^4$***

$(6x^2 - 2)^2 =$ ***$36x^4 - 24x^2 + 4$***

$(-2x^4 - y^2)^2 =$ ***$4x^8 + 4x^4y^2 + y^4$***

Entoure les produits qui peuvent s'écrire sous la forme d'un binôme au carré.

$(a - b) . (a + b)$ $\quad$ $(a - b) . (a - b)$ $\quad$ $(-a + b) . (b - a)$ $\quad$ $(a - b) . (b - a)$

$(a + b) . (b + a)$ $\quad$ $(a - b) . (-b + a)$ $\quad$ $(-a - b) . (a - b)$ $\quad$ $(b - a) . (b - a)$

2) Produit de deux binômes conjugués

Le **produit** de deux **binômes conjugués** est égal à la **différence** entre
le **carré** du terme qui **ne change pas** de signe et
le **carré** du terme qui **change** de signe.

$$\mathbf{(a + b) . (a - b) = a^2 - b^2}$$

Exemples : $(x + 2) . (x - 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$

$(-x - 3) . (-x + 3) = (-x)^2 - 3^2 = x^2 - 9$

$(x + 5) . (-x + 5) = (5 + x) . (5 - x) = 5^2 - x^2 = 25 - x^2$

Complète les développements ci-dessous.

$(2x + 3) . (2x - 3) = (\ \boldsymbol{2x}\ )^2 - (\ \boldsymbol{3}\ )^2$
$= \boldsymbol{4x^2 - 9}$

$(4x - 1) . (4x + 1) = (\ \boldsymbol{4x}\ )^2 - (\ \boldsymbol{1}\ )^2$
$= \boldsymbol{16x^2 - 1}$

$(3x - 5y) . (3x + 5y) = (\ \boldsymbol{3x}\ )^2 - (\ \boldsymbol{5y}\ )^2$
$= \boldsymbol{9x^2 - 25y^2}$

$(-3x + 2y) . (-3x - 2y) = (\ \boldsymbol{-3x}\ )^2 - (\ \boldsymbol{2y}\ )^2$
$= \boldsymbol{9x^2 - 4y^2}$

$(5x^2 - 3y) . (5x^2 + 3y) = (\ \boldsymbol{5x^2}\ )^2 - (\ \boldsymbol{3y}\ )^2$
$= \boldsymbol{25x^4 - 9y^2}$

$(x^3 + 2y^4) . (x^3 - 2y^4) = (\ \boldsymbol{x^3}\ )^2 - (\ \boldsymbol{2y^4}\ )^2$
$= \boldsymbol{x^6 - 4y^8}$

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Utilise la même démarche pour développer les produits de binômes conjugués ci-dessous.

$(4x - 6y) \cdot (4x + 6y) = (4x)^2 - (6y)^2$
$= 16x^2 - 36y^2$

$(2x^3 - y^2) \cdot (2x^3 + y^2) = (2x^3)^2 - (y^2)^2$
$= 4x^6 - y^4$

$(3x^4 + 5y^2) \cdot (3x^4 - 5y^2) = (3x^4)^2 - (5y^2)^2$
$= 9x^8 - 25y^4$

$(x^4 - 4y^3) \cdot (x^4 + 4y^3) = (x^4)^2 - (4y^3)^2$
$= x^8 - 16y^6$

Applique la formule des binômes conjugués, sans écrire les détails de la démarche.

$(2x - 3y) \cdot (2x + 3y) = 4x^2 - 9y^2$

$(3x^2 - y^3) \cdot (3x^2 + y^3) = 9x^4 - y^6$

$(3x^5 + 2) \cdot (3x^5 - 2) = 9x^{10} - 4$

$(7x^3 - 2y^2) \cdot (7x^3 + 2y^2) = 49x^6 - 4y^4$

$(6x^2 + y^2) \cdot (6x^2 - y^2) = 36x^4 - y^4$

$(5x + x^5) \cdot (5x - x^5) = 25x^2 - x^{10}$

Parmi les produits proposés, entoure ceux qui sont des produits de binômes conjugués et souligne dans les deux binômes le terme qui change de signe.

$\boxed{(a \underline{+ b}) \cdot (a \underline{- b})}$ $\boxed{(a \underline{+ 2b}) \cdot (\underline{-2b} + a)}$ $(3a - b) \cdot (-b + 3a)$

$\boxed{(-2x^2 \underline{+ 3x}) \cdot (-2x^2 \underline{- 3x})}$ $(-3x - 5) \cdot (3x + 5)$ $\boxed{(-4x^3 \underline{+ 5}) \cdot (\underline{-5} - 4x^3)}$

Modifie légèrement l'énoncé afin qu'il apparaisse sous la forme du produit de la somme de deux termes par leur différence ; ensuite, applique la formule des binômes conjugués.

$(3 + 4x) \cdot (-4x + 3) = (3 + 4x) \cdot (3 - 4x) = 9 - 16x^2$

$(3x^2 - 1) \cdot (1 + 3x^2) = (3x^2 + 1) \cdot (3x^2 - 1) = 9x^4 - 1$

$(2x + 5) \cdot (-5 + 2x) = (2x + 5) \cdot (2x - 5) = 4x^2 - 25$

$(2x - 3y^4) \cdot (-3y^4 - 2x) = (-3y^4 + 2x) \cdot (-3y^4 - 2x) = 9y^8 - 4x^2$

$(5x^3 - 3y^2) \cdot (-5x^3 - 3y^2) = (-3y^2 + 5x^3) \cdot (-3y^2 - 5x^3) = 9y^4 - 25x^6$

4) Produits remarquables : exercices de synthèse

Complète par = ou ≠.

$(x - 5)^2$	$\neq$	$(x + 5)^2$	$(x + 5) \cdot (x - 5)$	$=$	$(5 + x) \cdot (x - 5)$
$(x - 5)^2$	$=$	$(5 - x)^2$	$(x + 5) \cdot (x - 5)$	$\neq$	$(5 + x) \cdot (5 - x)$
$(x + 5)^2$	$=$	$(-x - 5)^2$	$(x + 5) \cdot (x - 5)$	$\neq$	$(-x + 5) \cdot (x + 5)$
$(x - 5)^2$	$=$	$(-x + 5)^2$	$(x + 5) \cdot (x - 5)$	$=$	$(-x + 5) \cdot (-x - 5)$
$(x + 5)^2$	$\neq$	$(-5 + x)^2$	$(x + 5) \cdot (x - 5)$	$\neq$	$(-x + 5) \cdot (x - 5)$

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Écris, si possible, les produits sous forme de puissances puis détermine la nature de chaque expression.

Natures : Carré d'un monôme (CM) Produit d'un monôme par un binôme (PMB)
Produit de deux binômes conjugués (PBC) Carré d'un binôme (CB)

	Nature		Nature
$(x + 3) . (x + 3) = (x+3)^2$	CB	$(-a - b) . (a - b) =$	PBC
$(3x) . (3x) = (3x)^2$	CM	$ab . ab = (ab)^2$	CM
$(x + 3) . (x - 3) =$	PBC	$(a - b) . (-b + a) = (a-b)^2$	CB
$x . (x + 3) =$	PMB	$(a - b) . (a + b) =$	PBC
$(x - 3) . (x - 3) = (x-3)^2$	CB	$-3a . (-3a) = (-3a)^2$	CM
$(-x + 3) . (3 - x) = (3-x)^2$	CB	$(a - 3) . (-a - 3) =$	PBC

Identifie l'exercice en précisant s'il s'agit d'une distributivité double (DD), du carré d'un binôme (CB) ou d'un produit de deux binômes conjugués (PBC), puis effectue.

CB	$(2x - 7)^2 = 4x^2 - 28x + 49$
PBC	$(3x^2 - 1) . (3x^2 + 1) = 9x^4 - 1$
CB	$(-2x^3 + 1)^2 = 4x^6 - 4x^3 + 1$
DD	$(5x - 3) . (3 - 5x) = 15x - 25x^2 - 9 + 15x = -25x^2 - 9 + 30x$
CB	$(4x^2 - 2y) . (-2y + 4x^2) = (4x^2 - 2y)^2 = 16x^4 - 16x^2y + 4y^2$
CB	$(-3x^4 - 2x)^2 = 9x^8 + 12x^5 + 4x^2$
PBC	$(-5x - 3y^2) . (-3y^2 + 5x) = (-3y^2 - 5x) . (-3y^2 + 5x) = 9y^4 - 25x^2$
CB	$(6x^3 + 5y^2) . (5y^2 + 6x^3) = (6x^3 + 5y^2)^2 = 36x^6 + 60x^3y^2 + 25y^4$
CB	$(2xy + 3x)^2 = 4x^2y^2 + 12x^2y + 9x^2$
PBC	$(-3x + 2y^2) . (2y^2 + 3x) = (2y^2 - 3x) . (2y^2 + 3x) = 4y^4 - 9x^2$

5) Produits remarquables et fractions

Réduis les doubles produits ci-dessous et donne ta réponse sous la forme d'une fraction irréductible.

$2 . 3x . \frac{1}{5} = \frac{6x}{5}$ $\quad 2 . \frac{2}{3}x . 5y = \frac{20xy}{3}$ $\quad 2 . \frac{2}{5}x . \frac{1}{3}y = \frac{4xy}{15}$

$2 . \frac{2x}{3} . \frac{3y}{2} = \frac{12xy}{6} = 2xy$ $\quad 2 . \frac{5x^2}{3} . \frac{y}{2} = \frac{10x^2y}{6} = \frac{5x^2y}{3}$ $\quad 2 . \frac{x^3}{4} . \frac{3x}{5} = \frac{6x^4}{20} = \frac{3x^4}{10}$

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Calcule les carrés ci-dessous en écrivant tes réponses sous forme de fractions.

$\left(\frac{1}{4}x\right)^2 = \frac{x^2}{16}$ $\left(\frac{4}{5}x\right)^2 = \frac{16x^2}{25}$ $\left(\frac{3y}{2}\right)^2 = \frac{9y^2}{4}$ $\left(\frac{2}{3}x^2\right)^2 = \frac{4x^4}{9}$

$\left(\frac{x^3}{2}\right)^2 = \frac{x^6}{4}$ $\left(\frac{3x^2}{5}\right)^2 = \frac{9x^4}{25}$ $\left(\frac{2xy}{3}\right)^2 = \frac{4x^2y^2}{9}$ $\left(\frac{x^2y}{4}\right)^2 = \frac{x^4y^2}{16}$

Applique les produits remarquables.

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 = x^2 + 2 . x . \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{5}\right).\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{5}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25}$$

$$\left(\frac{3x}{2}-\frac{y}{6}\right)^2 = \left(\frac{3x}{2}\right)^2 - 2 . \frac{3x}{2} . \frac{y}{6} + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = \frac{9x^2}{4} - \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{36}$$

$$\left(\frac{3}{2}x - y^2\right).\left(y^2 + \frac{3}{2}x\right) = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - \left(y^2\right)^2 = \frac{9x^2}{4} - y^4$$

$$\left(\frac{x^3}{2}+\frac{y^2}{3}\right)^2 = \left(\frac{x^3}{2}\right)^2 + 2 . \frac{x^3}{2} . \frac{y^2}{3} + \left(\frac{y^2}{3}\right)^2 = \frac{x^6}{4} + \frac{x^3y^2}{3} + \frac{y^4}{9}$$

$$\left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{3}y\right)^2 = \left(\frac{1}{5}x\right)^2 - 2 . \frac{1}{5}x . \frac{2}{3}y + \left(\frac{2}{3}y\right)^2 = \frac{x^2}{25} - \frac{4xy}{15} + \frac{4y^2}{9}$$

6) Produits remarquables et racines carrées

Réduis les doubles produits ci-dessous et donne ta réponse sous une forme irréductible.

$2 . 3x . \sqrt{5} = 6\sqrt{5}x$

$2 . 2x^2\sqrt{3} . \sqrt{3} = 4\sqrt{9}x^2 = 12x^2$

$2 . 3x\sqrt{2} . 2\sqrt{3} = 12\sqrt{6}x$

$2 . \frac{\sqrt{2}}{2} . 5x^3 = 5\sqrt{2}x^3$

Calcule les carrés ci-dessous.

$\left(x\sqrt{3}\right)^2 = 3x^2$ $\left(2x\sqrt{5}\right)^2 = 20x^2$ $\left(3x^2\sqrt{2}\right)^2 = 18x^4$

$\left(x^3\sqrt{6}\right)^2 = 6x^6$ $\left(3x\sqrt{3}\right)^2 = 27x^2$ $\left(x^2\sqrt{2}\right)^2 = 2x^4$

Applique les produits remarquables.

$$\left(x+\sqrt{3}\right)^2 = x^2 + 2 . x . \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$$

$$\left(3x - 5\sqrt{3}\right)^2 = (3x)^2 - 2 . 3x . 5\sqrt{3} + \left(5\sqrt{3}\right)^2 = 9x^2 - 30\sqrt{3}x + 75$$

$$\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right).\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{3}x\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3x^2 - 2$$

$\left(-2x^2+2\sqrt{3}\right)^2 =$ $-2x^2 + 2\,.\left(-2x\right)^2 .\, 2\sqrt{3} + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4x^4 - 8\sqrt{3}x^2 + 12$

$\left(-5\sqrt{3}+\sqrt{6}x\right).\left(-\sqrt{6}x-5\sqrt{3}\right) =$ $\left(-5\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{6}x\right)^2 = 75 - 6x^2$

7) Produits remarquables et sommes algébriques

Dans un calcul comprenant des produits remarquables et des sommes algébriques, il est fortement conseillé de mettre entre parenthèses le résultat d'un binôme au carré ou d'un produit de deux binômes conjugués si ceux-ci sont précédés d'un signe « – ».

Exemples

$$\begin{aligned} 2x\,.\,(4x-5) \mathbf{-} \mathbf{(2x-1)\,.\,(2x+1)} &= 8x^2 - 10x \mathbf{-} (4x^2-1) \\ &= 8x^2 - 10x \mathbf{-} 4x^2 \mathbf{+} 1 \\ &= 4x^2 - 10x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5+4x)\,.\,(5-4x) \mathbf{-} \mathbf{(3x-2)^2} &= 25 - 16x^2 \mathbf{-} (9x^2-12x+4) \\ &= 25 - 16x^2 \mathbf{-} 9x^2 \mathbf{+} 12x \mathbf{-} 4 \\ &= -25x^2 + 12x + 21 \end{aligned}$$

En adoptant la démarche utilisée dans les exemples ci-dessus et en appliquant les produits remarquables chaque fois que cela est possible, effectue et note ta réponse sous la forme d'un polynôme ordonné et réduit.

$$\begin{aligned} 3x\,.\,(5-2x) - (x-5)^2 &= 15x - 6x^2 - (x^2 - 10x + 25) \\ &= 15x - 6x^2 - x^2 + 10x - 25 \\ &= -7x^2 + 25x - 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x\,.\,(-5x+2) - (5x+3)^2 &= 10x^2 - 4x - (25x^2 + 30x + 9) \\ &= 10x^2 - 4x - 25x^2 - 30x - 9 \\ &= -15x^2 - 34x - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3x+2)^2 - (2x+3)\,.\,(2x-3) &= 9x^2 + 12x + 4 - (4x^2 - 9) \\ &= 9x^2 + 12x + 4 - 4x^2 + 9 \\ &= 5x^2 + 12x + 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3+5x)\,.\,(5x-3) - 3x\,.\,(5+x) &= 25x^2 - 9 - 15x - 3x^2 \\ &= 22x^2 - 15x - 9 \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-2x+1)^2 - (3x+5)\,.\,(3x-5) &= 4x^2 - 4x + 1 - (9x^2 - 25) \\ &= 4x^2 - 4x + 1 - 9x^2 + 25 \\ &= -5x^2 - 4x + 26 \end{aligned}$$

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Fiche 4.3 Division par (x − a)

1) Tableau de Horner

Pour trouver le quotient et le reste de la division d'un polynôme par un binôme de la forme **(x − a)**, il est pratique d'utiliser le **tableau de Horner**.

Exemple

$D(x) = x - \underline{2}$ $\qquad$ $A(x) = \underline{3}x^3 \underline{-8}x^2 \underline{+7}x \underline{-10}$

Coefficients de A(x)	+3	−8	+7	−10
		+	+	+
a = **2**		6	−4	6
		. 2	. 2	. 2
Coefficients de Q(x)	+3	−2	+3	−4

$Q(x) = 3x^2 - 2x + 3$ $\qquad$ $r = -4$

$3x^3 - 8x^2 + 7x - 10 = (x - 2) \cdot (3x^2 - 2x + 3) - 4$

Remarque : le degré du quotient s'obtient par l'égalité : $d°Q(x) = d°A(x) - 1$

Puisque $d°D(x) = 1$, si $d°A(x) = 3$, alors $d°Q(x) = 2$

Dans chaque cas, calcule le quotient et le reste du polynôme A(x) par le binôme D(x).

$A(x) = 4x^3 - 3x^2 - 5x + 1$
$D(x) = x - 2$

Coefficients de A(x)	*4*	*−3*	*−5*	*1*
a = *2*		*8*	*10*	*10*
Coefficients de Q(x)	*4*	*5*	*5*	*11*

Q(x) = $4x^2 + 5x + 5$ $\qquad$ r = *11*

$A(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$
$D(x) = x - 3$

Coefficients de A(x)	*1*	*−2*	*1*	*−3*
a = *3*		*3*	*3*	*12*
Coefficients de Q(x)	*1*	*1*	*4*	*9*

Q(x) = $x^2 + x + 4$ $\qquad$ r = *9*

$A(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x - 3$
$D(x) = x - 1$

Coefficients de A(x)	*1*	*1*	*−2*	*3*	*−3*
a = *1*		*1*	*2*	*0*	*3*
Coefficients de Q(x)	*1*	*2*	*0*	*3*	*0*

Q(x) = $x^3 + 2x^2 + 3$ $\qquad$ r = *0*

$A(x) = x^2 - 7x + 12$
$D(x) = x - 4$

Coefficients de A(x)	*1*	*−7*	*12*
a = *4*		*4*	*−12*
Coefficients de Q(x)	*1*	*−3*	*0*

Q(x) = $x - 3$ $\qquad$ r = *0*

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

2) Remarques importantes

a) Si le dividende A(x) est incomplet, il faut le compléter par des termes de coefficients nuls.

b) Si le diviseur D(x) est un binôme de la forme (x + a), il faut le mettre sous la forme (x – (–a)).

Exemple : détermination du quotient et du reste de la division de $x^4 + 3x^2 - 5$ par x + 2

$A(x) = x^4 + 3x^2 - 5 \Rightarrow A(x) = x^4 + \mathbf{0x^3} + 3x^2 + \mathbf{0x} - 5$

$D(x) = x + 2 \Rightarrow D(x) = x - (-2) \Rightarrow a = -2$

Coefficients de A(x)	1	**0**	3	**0**	–5
a = **–2**		–2	4	–14	28
Coefficients de Q(x)	1	–2	7	–14	23

$Q(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 14$ r = 23

Complète le tableau ci-dessous.

A(x)	D(x)	A(x) complété	a
$2x^3 - 2x - 4$	x – 2	$2x^3 + 0x^2 - 2x - 4$	2
$3x^4 - 5x^2 + 1$	x + 3	$3x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 0x + 1$	–3
$x^4 + 3x^3 + 3x - 2$	x + 1	$x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 3x - 2$	–1
$x^5 - x^3 + 2x + 3$	x – 1	$x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 + 2x + 3$	1

En tenant compte des deux remarques ci-dessus, détermine le quotient et le reste du polynôme A(x) par le binôme D(x).

$A(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$
$D(x) = x - 2$

Coefficients de A(x)	2	–3	0	–4
a = 2		4	2	4
Coefficients de Q(x)	2	1	2	0

$Q(x) = 2x^2 + x + 2$ r = 0

$A(x) = x^3 + 27$
$D(x) = x + 3$

Coefficients de A(x)	1	0	0	27
a = –3		–3	9	–27
Coefficients de Q(x)	1	–3	9	0

$Q(x) = x^2 - 3x + 9$ r = 0

$A(x) = 5x^2 - 1$
$D(x) = x + 1$

Coefficients de A(x)	5	0	–1
a = –1		–5	5
Coefficients de Q(x)	5	–5	4

$Q(x) = 5x - 5$ r = 4

$A(x) = x^3 + 2x^2 + 3$
$D(x) = x - 1$

Coefficients de A(x)	1	2	0	3
a = 1		1	3	3
Coefficients de Q(x)	1	3	3	6

$Q(x) = x^2 + 3x + 3$ r = 6

3) La loi du reste

Il est possible, sans effectuer le quotient, de trouver le reste de la division d'un polynôme A(x) par un binôme de la forme (x – a).

Pour cela, il suffit de calculer la valeur numérique de A(x) pour x = a.

Exemple

$A(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x - 10 \qquad D(x) = x - 2$

Le reste de la division de $3x^3 - 7x^2 + 5x - 10$ par $x - 2$ s'obtient en calculant

$A(2) = 3 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 10 = 3 \cdot 8 - 7 \cdot 4 + 5 \cdot 2 - 10 = 24 - 28 + 10 - 10 = -4$

Dans chaque cas, calcule le reste de la division du polynôme A(x) par le binôme (x – a).

A(x)	D(x)	a	Calcul du reste A(a)
$2x^2 - 2x - 4$	$x - 3$	*3*	$2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 4$ $= 2 \cdot 9 - 2 \cdot 3 - 4 = 18 - 6 - 4 = 8$
$2x^2 - 2x - 4$	$x + 1$	*–1*	$2 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 4$ $= 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) - 4 = 2 + 2 - 4 = 0$
$x^3 - 8$	$x - 2$	*2*	$2^3 - 8$ $= 8 - 8 = 0$
$x^3 - x^2 + 4x + 4$	$x + 3$	*–3*	$(-3)^3 - (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 4$ $= -27 - 9 - 12 + 4 = -44$
$x^3 - x^2 - 4x + 4$	$x + 2$	*–2*	$(-2)^3 - (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 4$ $= -8 - 4 + 8 + 4 = 0$
$2x^3 - 9x^2 + 7$	$x - 1$	*1*	$2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 7$ $= 2 \cdot 1 - 9 \cdot 1 + 7 = 2 - 9 + 7 = 0$
$2x^3 - 9x^2 + 7$	$x - 2$	*2*	$2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 7$ $= 2 \cdot 8 - 9 \cdot 4 + 7 = 16 - 36 + 7 = -13$
$2x^3 - 9x^2 + 7$	$x + 1$	*–1*	$2 \cdot (-1)^3 - 9 \cdot (-1)^2 + 7$ $= 2 \cdot (-1) - 9 \cdot 1 + 7 = -2 - 9 + 7 = -4$

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Fiche 4.4 Factorisation par mise en évidence

1) Mise en évidence simple

Lorsque tous les termes d'une somme algébrique ont un (des) **facteur(s) commun(s)**, on peut le(s) **mettre en évidence**.

Les termes de la nouvelle somme s'obtiennent en **divisant** les différents termes de la somme de l'énoncé par le(s) facteur(s) mis en évidence.

Exemples

Facteurs numériques → mettre en évidence leur PGCD

$12a + 18b = \mathbf{6} \,.\, 2a + \mathbf{6} \,.\, 3b = \mathbf{6} \,.\, (2a + 3b)$

Facteurs littéraux (sans exposant) → mettre en évidence les facteurs communs

$5abc + 7abd = \mathbf{ab} \,.\, 5c + \mathbf{ab} \,.\, 7d = \mathbf{ab} \,.\, (5c + 7d)$

Puissances de même base → mettre en évidence la puissance avec l'exposant le plus petit

$3a^5 - 5a^3 = \mathbf{a^3} \,.\, 3a^2 - \mathbf{a^3} \,.\, 5 = \mathbf{a^3} \,.\, (3a^2 - 5)$

Somme entre parenthèses → mettre en évidence la parenthèse identique

$a \,.\, \mathbf{(c + d)} + 2b \,.\, \mathbf{(c + d)} = \mathbf{(c + d)} \,.\, (a + 2b)$

En face de chaque exercice, tu trouveras trois propositions de mise en évidence de facteurs communs. Barre celle qui est fausse et entoure la meilleure.

$12ab + 18ac$	a	$\boxed{6a}$	$\cancel{12a}$
$6a^2 + 9a$	$\boxed{3a}$	3	$\cancel{3a^2}$
$14a^3 - 21a^2$	$7a$	$\cancel{14a^2}$	$\boxed{7a^2}$
$50a + 75a^2$	$\cancel{50a}$	$\boxed{25a}$	$5a$
$5a^5 - 2a^2$	$\cancel{2a^2}$	a	$\boxed{a^2}$

$a^3 + a^6 + a^9$	$\boxed{a^3}$	$\cancel{a^6}$	a
$40abd + 16abc$	$4ab$	$\cancel{16ab}$	$\boxed{8ab}$
$-24ab + 36ac$	$-6a$	$\cancel{-36a}$	$\boxed{-12a}$
$32a^3 - 16a^2$	16	$\boxed{16a^2}$	$\cancel{8a^3}$
$8a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3$	ab	$\cancel{8ab}$	$\boxed{2ab}$

Les facteurs communs ayant été mis en évidence, complète les égalités.

$50xy + 75xz = 25x \,.\, (\ 2y + 3z\ )$

$-8ab + 16ac = 8a \,.\, (\ -b + 2c\ )$

$15ac + 5a = 5a \,.\, (\ 3c + 1\ )$

$12x^3 + 8x = 4x \,.\, (\ 3x^2 + 2\ )$

$35x^5 + 25x^3 = 5x^3 \,.\, (\ 7x^2 + 5\ )$

$12x^6 + 4x^2 = 4x^2 \,.\, (\ 3x^4 + 1\ )$

$12x^3y^2 - 18xy^3 = 6xy^2 \,.\, (\ 2x^2 - 3y\ )$

$27x^4 - 24x^3 + 3x^2 = 3x^2 \,.\, (\ 9x^2 - 8x + 1\ )$

Mets le(s) facteur(s) commun(s) en évidence.

$45x + 36xy = 9x \,.\, (5 + 4y)$

$15a^3 - 25a^2 = 5a^2 \,.\, (3a - 5)$

$-27x^2 + 18x = 9x \,.\, (-3x + 2)$

$-7x^3 - 21x^6 = -7x^3 \,.\, (1 + 3x^3)$

$8a^3 - 4a^2 + 6a = 2a \,.\, (4a^2 - 2a + 3)$

$-6a^2b^2 + 9ab^3 - 12a^3b^2 = 3ab^2 \,.\, (-2a + 3b - 4a^2)$

$x^9 + x^6 - x^3 = x^3 \,.\, (x^6 + x^3 - 1)$

$12x^2y^2 - 18xy^3 + 24x^3y = 6xy \,.\, (2xy - 3y^2 + 4x^2)$

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Le(s) facteur(s) commun(s) ayant été mis en évidence, complète les égalités.

$3a \,.\, (a + b) - 2b \,.\, (a + b) = (a + b) \,.\, (\ 3a - 2b\ )$

$2c \,.\, (a - b) + 3b \,.\, (a - b) = (a - b) \,.\, (\ 2c + 3b\ )$

$6c \,.\, (2a - b) - 9d \,.\, (2a - b) = 3 \,.\, (2a - b) \,.\, (\ 2c - 3d\ )$

$15a \,.\, (a + b) + 25b \,.\, (a + b) = 5 \,.\, (a + b) \,.\, (\ 3a + 5b\ )$

Mets le(s) facteur(s) commun(s) en évidence.

$2a \,.\, (a + b) - 3b \,.\, (a + b) = (a + b) \,.\, (2a - 3b)$

$-4a \,.\, (-2b + a) + 5b \,.\, (a - 2b) = (a - 2b) \,.\, (-4a + 5b)$

$12a \,.\, (2c - d) + 15b \,.\, (2c - d) = 3 \,.\, (2c - d) \,.\, (4a + 5b)$

$2x \,.\, (x - 2y) - 6y \,.\, (-2y + x) = 2 \,.\, (x - 2y) \,.\, (x - 3y)$

2) Parenthèses opposées

Quand des parenthèses **opposées** apparaissent dans les deux termes d'une somme algébrique, il faut opérer un **changement de signes** afin de les rendre **égales**.

Il suffit alors de mettre cette parenthèse en évidence.

Exemple

$. (-1)$ $. (-1)$

$a \,.\, (a - 5b) + 3b \,.\, (5b - a) = a \,.\, \underline{(a - 5b)} - 3b \,.\, \underline{(-5b + a)}$

$= \underline{(a - 5b)} \,.\, (a - 3b)$

En suivant la démarche utilisée à l'exemple ci-dessus, mets les facteurs communs en évidence.

$5x \,.\, (2x - y) - 3y \,.\, (y - 2x) = 5x \,.\, (2x - y) + 3y \,.\, (-y + 2x)$

$= (2x - y) \,.\, (5x + 3y)$

$2a \,.\, (-a + b) + 3b \,.\, (a - b) = 2a \,.\, (-a + b) - 3b \,.\, (-a + b)$

$= (-a + b) \,.\, (2a - 3b)$

$3x \,.\, (4a - 5b) - 2y \,.\, (-4a + 5b) = 3x \,.\, (4a - 5b) + 2y \,.\, (4a - 5b)$

$= (4a - 5b) \,.\, (3x + 2y)$

$4a \,.\, (2x - 3) + (3 - 2x) = 4a \,.\, (2x - 3) - (-3 + 2x)$

$= (2x - 3) \,.\, (4a - 1)$

$7x \,.\, (3x - y) + 2y \,.\, (y - 3x) = 7x \,.\, (3x - y) - 2y \,.\, (-y + 3x)$

$= (3x - y) \,.\, (7x - 2y)$

$-3 \,.\, (a - b) - y \,.\, (b - a) = -3 \,.\, (a - b) + y \,.\, (-b + a)$

$= (a - b) \,.\, (-3 + y)$

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

3) Mise en évidence et groupements

Lorsque les termes d'une somme algébrique n'ont pas de facteurs communs, il est parfois possible de factoriser cette somme après avoir groupé les termes de manière à faire apparaître un (des) facteur(s) commun(s).

Exemples

$2a + 8b + 3ab + 12b^2 = (2a + 8b) + (3ab + 12b^2)$ Groupement

$= \mathbf{2} \cdot \underline{(a + 4b)} + \mathbf{3b} \cdot \underline{(a + 4b)}$ Mise en évidence « partielle »

$= \underline{(a + 4b)} \cdot (\mathbf{2} + \mathbf{3b})$ Mise en évidence

$ab - 2a - 3b + 6 = (ab - 2a) - (3b - 6)$

$= \mathbf{a} \cdot \underline{(b - 2)} - \mathbf{3} \cdot \underline{(b - 2)}$

$= \underline{(b - 2)} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{3})$

Pour chaque expression, entoure les groupements corrects.

$ax - ay - bx + by$

- $(ax - ay) \cdot (-bx + by)$
- $(ax - ay) - (bx + by)$
- $(ax - ay) - (bx - by)$
- $(ax - ay) + (-bx + by)$

$6ab + 4a - 15b - 10$

- $(6ab + 4a) + (-15b - 10)$
- $(6ab + 4a) - (15b + 10)$
- $(6ab + 4a) \cdot (-15b - 10)$
- $(6ab + 4a) - (15b - 10)$

Les groupements de termes ayant été effectués, poursuis la factorisation de chaque expression.

$ab - ac + bd - cd$
$= (ab - ac) + (bd - cd)$
$= a \cdot (b - c) + d \cdot (b - c)$
$= (b - c) \cdot (a + d)$

$ab + a - bc - c$
$= (ab + a) - (bc + c)$
$= a \cdot (b + 1) - c \cdot (b + 1)$
$= (b + 1) \cdot (a - c)$

$8ac + 10ad - 12bc - 15bd$
$= (8ac + 10ad) + (-12bc - 15bd)$
$= 2a \cdot (4c + 5d) - 3b \cdot (4c + 5d)$
$= (4c + 5d) \cdot (2a - 3b)$

$2a^3 - 5ab + 6a^2 - 15b$
$= (2a^3 + 6a^2) - (5ab + 15b)$
$= 2a^2 \cdot (a + 3) - 5b \cdot (a + 3)$
$= (a + 3) \cdot (2a^2 - 5b)$

Après avoir effectué les groupements nécessaires, factorise chaque expression.

$ax - ay + 3x - 3y$
$= (ax - ay) + (3x - 3y)$
$= a \cdot (x - y) + 3 \cdot (x - y)$
$= (x - y) \cdot (a + 3)$

$2a - 3ab - 3b + 2a^2$
$= (2a + 2a^2) - (3b + 3ab)$
$= 2a \cdot (1 + a) - 3b \cdot (1 + a)$
$= (1 + a) \cdot (2a - 3b)$

$3xy - 6x^2 + 2ay - 4ax$
$= (3xy - 6x^2) + (2ay - 4ax)$
$= 3x \cdot (y - 2x) + 2a \cdot (y - 2x)$
$= (y - 2x) \cdot (3x + 2a)$

$3ay + 2b - 3ay^2 - 2by$
$= (3ay - 3ay^2) + (2b - 2by)$
$= 3ay \cdot (1 - y) + 2b \cdot (1 - y)$
$= (1 - y) \cdot (3ay + 2b)$

Fiche 4.5 Factorisation et produits remarquables

1) Produits remarquables

Une différence de deux carrés se factorise en un produit de deux binômes conjugués. $a^2 - b^2 = (a + b) . (a - b)$

Exemples : $4x^2 - 9 = (\mathbf{2x})^2 - \mathit{3}^2 = (\mathbf{2x} + \mathit{3}) . (\mathbf{2x} - \mathit{3})$

$49x^2 - 25y^2 = (\mathbf{7x})^2 - (\mathit{5y})^2 = (\mathbf{7x} + \mathit{5y}) . (\mathbf{7x} - \mathit{5y})$

Un trinôme carré parfait se factorise en un carré d'un binôme. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$; $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Exemples : $9x^2 + 30x + 25 = (\mathbf{3x})^2 + 2 . \mathbf{3x} . \mathit{5} + \mathit{5}^2 = (\mathbf{3x} + \mathit{5})^2$

$16x^2 - 8x + 1 = (\mathbf{4x})^2 - 2 . \mathbf{4x} . \mathit{1} + \mathit{1}^2 = (\mathbf{4x} - \mathit{1})^2$

Écris chaque expression sous la forme du carré d'un monôme.

$4a^2 = (\ 2a\ )^2$ $36x^2 = (\ 6x\ )^2$ $16b^4 = (\ 4b^2\ )^2$ $121a^6 = (\ 11a^3\ )^2$

$9x^2 = (\ 3x\ )^2$ $49y^2 = (\ 7y\ )^2$ $81x^4 = (\ 9x^2\ )^2$ $25a^2b^2 = (\ 5ab\ )^2$

Dans chaque trinôme carré parfait, entoure les deux carrés.

$16x^2 - 8x + 1$ $4 + 4x + x^2$ $64 + 9x^2 - 48x$

$20x + 25 + 4x^2$ $49 - 14x + x^2$ $x^4 + 9 + 6x^2$

Entoure les expressions qui peuvent être considérées comme différences de deux carrés.

$a^2 - 1$ $x^2 + 9$ $-25x^2 + 4$ $-9x^2 - 16y^4$ $36a^2 - 5b^9$ $4a^2 - 16b^2$

Factorise les expressions suivantes en un produit de deux binômes conjugués en notant les détails de ton raisonnement.

$9 - 16x^2 = (\ 3\ )^2 - (\ 4x\ )^2 = (\ 3 + 4x\ ) . (\ 3 - 4x\ )$

$49a^2 - 36b^2 = (\ 7a\ )^2 - (\ 6b\ )^2 = (\ 7a + 6b\ ) . (\ 7a - 6b\ )$

$4a^2 - b^2 = (\ 2a\ )^2 - (\ b\ )^2 = (\ 2a + b\ ) . (\ 2a - b\ )$

$-64 + 25x^2 = (\ 5x\ )^2 - (\ 8\ )^2 = (\ 5x + 8\ ) . (\ 5x - 8\ )$

Factorise directement les expressions suivantes.

$16a^2 - 9y^2 = (4a + 3y) . (4a - 3y)$ $1 - 49x^2 = (1 + 7x) . (1 - 7x)$

$25a^2 - 49b^2 = (5a + 7b) . (5a - 7b)$ $a^2 - 100b^2 = (a + 10b) . (a - 10b)$

$-81a^2 + 64 = (8 + 9a) . (8 - 9a)$ $-16y^2 + x^2 = (x + 4y) . (x - 4y)$

Après avoir souligné les deux carrés dans l'énoncé, factorise les expressions suivantes en un carré d'un binôme en notant les détails de ton raisonnement.

$\underline{a^2} + 8ab \underline{+ 16b^2} = (\ a\ )^2 + 2 \cdot (\ a\ ) \cdot (\ 4b\ ) + (\ 4b\ )^2 = (\ a + 4b\ )^2$

$\underline{4x^2} - 12x \underline{+ 9} = (\ 2x\ )^2 - 2 \cdot (\ 2x\ ) \cdot (\ 3\ ) + (\ 3\ )^2 = (\ 2x - 3\ )^2$

$\underline{25y^2} + 10xy \underline{+ x^2} = (\ 5y\ )^2 + 2 \cdot (\ 5y\ ) \cdot (\ x\ ) + (\ x\ )^2 = (\ 5y + x\ )^2$

$\underline{36a^2} - 12a \underline{+ 1} = (\ 6a\ )^2 - 2 \cdot (\ 6a\ ) \cdot (\ 1\ ) + (\ 1\ )^2 = (\ 6a - 1\ )^2$

Après avoir souligné les deux carrés dans l'énoncé, factorise directement les expressions suivantes.

$\underline{9a^2} - 12a \underline{+ 4} = (3a - 2)^2$

$\underline{4x^2} + 20xy \underline{+ 25y^2} = (2x + 5y)^2$

$-12ab \underline{+ 9b^2} \underline{+ 4a^2} = (3b - 2a)^2$

$\underline{a^2} \underline{+ 16b^2} + 8ab = (a + 4b)^2$

$\underline{25x^2} \underline{+ 16} - 40x = (5x - 4)^2$

$\underline{9x^4} + 6x^2 \underline{+ 1} = (3x^2 + 1)^2$

2) Une différence de deux carrés avec parenthèses

Si la base d'un carré est un binôme entre parenthèses, il est conseillé de conserver ces parenthèses à la première étape de la factorisation.

Exemples

$$\begin{aligned}\mathbf{(x + 1)}^2 - 4 &= [\mathbf{(x + 1)} + 2] \cdot [\mathbf{(x + 1)} - 2] \\ &= (x + 1 + 2) \cdot (x + 1 - 2) \\ &= (x + 3) \cdot (x - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}25 - \mathbf{(x - 3)}^2 &= [5 + \mathbf{(x - 3)}] \cdot [5 - \mathbf{(x - 3)}] \\ &= (5 + x - 3) \cdot (5 - x + 3) \\ &= (2 + x) \cdot (8 - x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{(2x - 5)}^2 - \mathbf{(x + 1)}^2 &= [\mathbf{(2x - 5)} + \mathbf{(x + 1)}] \cdot [\mathbf{(2x - 5)} - \mathbf{(x + 1)}] \\ &= (2x - 5 + x + 1) \cdot (2x - 5 - x - 1) \\ &= (3x - 4) \cdot (x - 6)\end{aligned}$$

En suivant la démarche utilisée dans les exemples ci-dessus, factorise les expressions suivantes.

$$\begin{aligned}(a - 1)^2 - 9 &= [(a - 1) + 3] \cdot [(a - 1) - 3] \\ &= (a - 1 + 3) \cdot (a - 1 - 3) \\ &= (a + 2) \cdot (a - 4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}16 - (2x - 5)^2 &= [4 + (2x - 5)] \cdot [4 - (2x - 5)] \\ &= (4 + 2x - 5) \cdot (4 - 2x + 5) \\ &= (2x - 1) \cdot (- 2x + 9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x^2 - (x - y)^2 &= [2x + (x - y)] \cdot [2x - (x - y)] \\ &= [2x + x - y] \cdot [2x - x + y] \\ &= (3x - y) \cdot (x + y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}9a^2 - (2a + 7)^2 &= [3a+(2a + 7)] \cdot [3a-(2a + 7)] \\ &= (3a + 2a + 7) \cdot (3a - 2a - 7) \\ &= (5a + 7) \cdot (a - 7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5x - y)^2 - (2x - 3y)^2 &= [(5x - y) + (2x - 3y)] \cdot [(5x - y) - (2x - 3y)] \\ &= (5x - y + 2x - 3y) \cdot (5x - y - 2x + 3y) \\ &= (7x - 4y) \cdot (3x + 2y)\end{aligned}$$

$(3a+7)^2 - (5+4a)^2 = [(3a+7)+(5+4a)] \,.\, [(3a+7)-(5+4a)]$

$= (3a+7+5+4a) \,.\, (3a+7-5-4a)$

$= (7a+12) \,.\, (-a+2)$

3) Exercices de synthèse

Identifie la méthode de factorisation à utiliser en précisant s'il s'agit d'une différence de deux carrés (DC) ou d'un trinôme carré parfait (TCP), puis factorise.

DC	$16a^2 - 81b^2 = (4a+9b) \,.\, (4a-9b)$	TCP	$49x^2 + 42x + 9 = (7x+3)^2$
TCP	$y^2 - 8y + 16 = (y-4)^2$	DC	$-4y^2 + 25 = (5+2y) \,.\, (5-2y)$
TCP	$16a^2 + 25 + 40x = (4a+5)^2$	TCP	$9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$
DC	$b^2 - 49a^2 = (b+7a) \,.\, (b-7a)$	TCP	$60xy + 36x^2 + 25y^2 = (6x+5y)^2$

Dans chaque cas, entoure la (les) factorisation(s) correcte(s).

$x^2 - 10x + 25$	$(x-5) \,.\, (x+5)$	$(x-5)^2$	$(x+5)^2$	$(x-5) \,.\, (x-5)$
$x^2 - 49$	$(x-7) \,.\, (x+7)$	$(x+7)^2$	$(x-7)^2$	$(x-7) \,.\, (x-7)$
$9x^2 + 24x + 16$	$(3x+4)^2$	$(3x-4)^2$	$(4+3x)^2$	$(3x+4) \,.\, (3x+4)$
$-9 + 4x^2$	$(3-2x) \,.\, (3+2x)$	$(2x-3) \,.\, (2x+3)$	$(2x-3)^2$	$(3-2x)^2$
$36 - 12x + x^2$	$(x-6)^2$	$(x-6) \,.\, (6+x)$	$(x-6) \,.\, (x-6)$	$(6-x)^2$

Mets les facteurs communs en évidence, puis utilise un des produits remarquables.

$3a^2 - 75 = 3 \,.\, (a^2-25) = 3 \,.\, (a+5) \,.\, (a-5)$

$2a^2 - 12a + 18 = 2 \,.\, (a^2-6a+9) = 2 \,.\, (a-3)^2$

$125x^3 + 50x^2 + 5x = 5x \,.\, (25x^2+10x+1) = 5x \,.\, (5x+1)^2$

$2 - 72x^2 = 2 \,.\, (1-36x^2) = 2 \,.\, (1+6x) \,.\, (1-6x)$

$5a^2 + 20 + 20a = 5 \,.\, (a^2+4+4a) = 5 \,.\, (a+2)^2$

$50x^3 - 2x^5 = 2x^3 \,.\, (25-x^2) = 2x^3 \,.\, (5+x) \,.\, (5-x)$

$8a^2 - 24ab + 18b^2 = 2 \,.\, (4a^2-12ab+9b^2) = 2 \,.\, (2a-3b)^2$

$12y^4 - 12y^3 + 3y^2 = 3y^2 \,.\, (4y^2-4y+1) = 3y^2 \,.\, (2y-1)^2$

$9a^3b - 49ab^3 = ab \,.\, (9a^2-49b^2) = ab \,.\, (3a+7b) \,.\, (3a-7b)$

$50y^3 + 32y - 80y^2 = 2y \,.\, (25y^2+16-40y) = 2y \,.\, (5y-4)^2$

$16a^2 + 4a^3 + 16a = 4a \,.\, (4a+a^2+4) = 4a \,.\, (a+2)^2$

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Fiche 4.6 Divisibilité par (x – a) et factorisation

1) Le diviseur (x – a) est connu

Si le polynôme **A(x)** est **divisible** par un binôme de la forme **(x – a)**,
alors il pourra s'écrire sous la forme d'un produit du type : **(x – a) . Q(x)**

Exemple : $A(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ $D(x) = x - 2$

1) Recherche du quotient Q(x) par la méthode de Horner

Coefficients de A(x)	2	–9	7	6
a = **2**		4	–10	–6
Coefficients de Q(x)	2	–5	–3	0

$Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$ $r = 0$

2) Factorisation de A(x)
$2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 = (x - 2) . (2x^2 - 5x - 3)$

Complète les phrases.

Si A(1) = 0, alors A(x) est divisible par *(x – 1)*

Si A(2) = 0, alors A(x) est divisible par *(x – 2)*

Si A(–3) = 0, alors A(x) est divisible par *(x + 3)*

Si A(–1) = 0, alors A(x) est divisible par *(x + 1)*

Le polynôme A(x) étant divisible par le binôme D(x), factorise-le.

$A(x) = 2x^3 - 9x^2 + 11x - 6$
$D(x) = x - 3$

Coefficients de A(x)	*2*	*–9*	*11*	*–6*
a = *3*		*6*	*–9*	*6*
Coefficients de Q(x)	*2*	*–3*	*2*	*0*

$Q(x) =$ *$2x^2 - 3x + 2$*

$2x^3 - 9x^2 + 11x - 6 = (x - 3) . ($*$2x^2 - 3x + 2$*$)$

$A(x) = x^3 - 5x - 2$
$D(x) = x + 2$

Coefficients de A(x)	*1*	*0*	*–5*	*–2*
a = *–2*		*–2*	*4*	*2*
Coefficients de Q(x)	*1*	*–2*	*–1*	*0*

$Q(x) =$ *$x^2 - 2x - 1$*

$x^3 - 5x - 2 = (x + 2) . ($*$x^2 - 2x - 1$*$)$

$A(x) = 3x^2 - 2x - 5$
$D(x) = x + 1$

Coefficients de A(x)	*3*	*–2*	*–5*
a = *–1*		*–3*	*5*
Coefficients de Q(x)	*3*	*–5*	*0*

$Q(x) =$ *$3x - 5$*

$3x^2 - 2x - 5 = (x + 1) . ($*$3x - 5$*$)$

$A(x) = x^3 - 1$
$D(x) = x - 1$

Coefficients de A(x)	*1*	*0*	*0*	*–1*
a = *1*		*1*	*1*	*1*
Coefficients de Q(x)	*1*	*1*	*1*	*0*

$Q(x) =$ *$x^2 + x + 1$*

$x^3 - 1 = (x - 1) . ($*$x^2 + x + 1$*$)$

2) Le diviseur (x – a) n'est pas connu

Pour **factoriser** un polynôme **A(x)** en utilisant la division par un binôme de la forme **(x – a)** inconnu, il faut déterminer la valeur de « **a** ».
Celle-ci est nécessairement un **diviseur** du **terme indépendant** de A(x), mais il faut **vérifier** que le **reste** de la division est **nul** en calculant **A(a)**.

Exemple : $A(x) = x^3 - x^2 + x - 6$

1) Recherche des diviseurs de –6 : 1, 2, 3, 6, –1, –2, –3, –6
2) Recherche des restes de la division de A(x) par x – 1, x – 2, x – 3, x + 1, ...

$A(1) = 1^3 - 1^2 + 1 - 6 = 1 - 1 + 1 - 6 = -5$

$A(\mathbf{2}) = 2^3 - 2^2 + 2 - 6 = 8 - 4 + 2 - 6 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad a = \mathbf{2}$

3) Recherche du quotient de A(x) par x – **2**

Coefficients de A(x)	1	–1	1	–6
a = **2**		2	2	6
Coefficients de Q(x)	1	1	3	0

$Q(x) = x^2 + x + 3 \qquad r = 0$

4) Factorisation de A(x)

$x^3 - x^2 + x - 6 = (x - \mathbf{2}) \,.\, (x^2 + x + 3)$

Sachant que le polynôme $A(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ est divisible par un binôme de la forme (x – a), détermine les valeurs de « a » pour lesquelles A(x) est factorisable.

Recherche des diviseurs de 4 : *1, –1, 2, –2, 4, –4*
Recherche des restes :

$A(1) = 1^4 - 5 \,.\, 1^2 + 4$
$= 1 - 5 + 4 = 0$

$A(-1) = (-1)^4 - 5 \,.\, (-1)^2 + 4$
$= 1 - 5 \,.\, 1 + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$

$A(2) = 2^4 - 5 \,.\, 2^2 + 4$
$= 16 - 5 \,.\, 4 + 4 = 16 - 20 + 4 = 0$

$A(-2) = (-2)^4 - 5 \,.\, (-2)^2 + 4$
$= 16 - 5 \,.\, 4 + 4 = 16 - 20 + 4 = 0$

$A(4) = 4^4 - 5 \,.\, 4^2 + 4$
$= 256 - 5 \,.\, 16 + 4 = 256 - 80 + 4 = 180$

$A(-4) = (-4)^4 - 5 \,.\, (-4)^2 + 4$
$= 256 - 5 \,.\, 16 + 4 = 256 - 80 + 4 = 180$

Les diviseurs de A(x) sont : *(x – 1), (x + 1), (x – 2) et (x + 2)*

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Pour chaque polynôme A(x), entoure le(s) binôme(s) de la forme (x – a) qui permettrai(en)t de le factoriser.

A(x)	x – a	Démarche
$x^3 + 3x^2 + x + 3$	x + 1	$(-1)^3 + 3 \,.\, (-1)^2 + (-1) + 3 = -1 + 3 - 1 + 3 = 4$
	x – 1	$1^3 + 3 \,.\, 1^2 + 1 + 3 = 1 + 3 + 1 + 3 = 8$
	x + 3	$(-3)^3 + 3 \,.\, (-3)^2 + (-3) + 3 = -27 + 27 - 3 + 3 = 0$
	x – 3	$3^3 + 3 \,.\, 3^2 + 3 + 3 = 27 + 27 + 3 + 3 = 60$
$x^4 + 4x^2 - 5$	x + 1	$(-1)^4 + 4 \,.\, (-1)^2 - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$
	x – 1	$1^4 + 4 \,.\, 1^2 - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$
	x + 5	$(-5)^4 + 4 \,.\, (-5)^2 - 5 = 625 + 100 - 5 = 720$
	x – 5	$5^4 + 4 \,.\, 5^2 - 5 = 625 + 100 - 5 = 720$

Détermine un binôme (x – a) par lequel A(x) est divisible, puis utilise Horner pour trouver le quotient de A(x) par ce binôme et enfin factorise A(x).

$A(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 5$

Recherche des diviseurs de 5 : 1, –1, 5, –5

Recherche des restes

$A(1) = 2 \,.\, 1^3 + 1^2 - 8 \,.\, 1 + 5$

$= 2 \,.\, 1 + 1 - 8 + 5$

$= 2 + 1 - 8 + 5 = 0$

$A(-1) = 2 \,.\, (-1)^3 + (-1)^2 - 8 \,.\, (-1) + 5$

$= -2 + 1 + 8 + 5 = 12$

$A(5) = 2 \,.\, 5^3 + 5^2 - 8 \,.\, 5 + 5$

$= = 250 + 25 - 40 + 5 = 240$

$A(-5) = 2 \,.\, (-5)^3 + (-5)^2 - 8 \,.\, (-5) + 5$

$= -250 + 25 + 40 + 5 = -180$

Recherche du quotient de A(x) par (x – 1)

Coefficients de A(x)	2	1	–8	5
a = 1		2	3	–5
Coefficients de Q(x)	2	3	–5	0

Q(x) = $2x^2 + 3x - 5$

Factorisation de A(x)

$2x^3 + x^2 - 8x + 5 = (x - 1) \,.\, (2x^2 + 3x - 5)$

$A(x) = 2x^2 + 5x - 3$

Recherche des diviseurs de –3 : 1, –1, 3, –3

Recherche des restes

$A(1) = 2 \,.\, 1^2 + 5 \,.\, 1 - 3$

$= 2 + 5 - 3 = 4$

$A(-1) = 2 \,.\, (-1)^2 + 5 \,.\, (-1) - 3$

$= 2 - 5 - 3 = -6$

$A(3) = 2 \,.\, 3^2 + 5 \,.\, 3 - 3$

$= 18 + 15 - 3 = 30$

$A(-3) = 2 \,.\, (-3)^2 + 5 \,.\, (-3) - 3$

$= 2 \,.\, 9 + 5 \,.\, (-3) - 3$

$= 18 - 15 - 3 = 0$

Recherche du quotient de A(x) par (x + 3)

Coefficients de A(x)	2	5	–3
a = –3		–6	3
Coefficients de Q(x)	2	–1	0

Q(x) = $2x - 1$

Factorisation de A(x)

$2x^2 + 5x - 3 = (x + 3) \,.\, (2x - 1)$

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Fiche 4.7 Factorisation : exercices de synthèse

1) Factorisation d'un binôme

Pour factoriser un binôme, on envisage dans l'ordre :

- la **mise en évidence** de facteurs communs

  Exemples : $6x^2 + 8xy = 2x \,.\, (3x + 4y)$ $\qquad 3x^3 - 2x^2 = x^2 \,.\, (3x - 2)$

- le produit remarquable $\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b) \,.\, (a - b)}$

  Exemples : $16x^2 - 9y^2 = (4x + 3y) \,.\, (4x - 3y)$ $\qquad 25x^2 - 1 = (5x + 1) \,.\, (5x - 1)$

Factorise les binômes ci-dessous.

$45x + 18y = 9 \,.\, (5x + 2y)$

$16 - x^2 = (4 + x) \,.\, (4 - x)$

$8a^2b - 12ab = 4ab \,.\, (2a - 3)$

$-4 + a^2 = (a + 2) \,.\, (a - 2)$

$4a + 4a^2 = 4a \,.\, (1 + a)$

$9a^2 + 9b^2 = 9 \,.\, (a^2 + b^2)$

$9x^2 - 25y^2 = (3x + 5y) \,.\, (3x - 5y)$

$5a^5 - 15a^3 = 5a^3 \,.\, (a^2 - 3)$

$1 - 16x^2 = (1 + 4x) \,.\, (1 - 4x)$

$24xy^2 + 9x^2y = 3xy \,.\, (8y + 3x)$

$9a^2 - b^2 = (3a + b) \,.\, (3a - b)$

$81a^9 - 9a^4 = 9a^4 \,.\, (9a^5 - 1)$

2) Factorisation d'un trinôme

Pour factoriser un trinôme, on envisage dans l'ordre :

- la **mise en évidence** de facteurs communs

  Exemples : $8x^2 - 12x + 16 = 4 \,.\, (2x^2 - 3x + 4)$

  $6ab - 2a + 4ac = 2a \,.\, (3b - 1 + 2c)$

- les produits remarquables $\mathbf{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$ ou $\mathbf{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$

  Exemples : $16x^2 + 24xy + 9y^2 = (4x + 3y)^2$ $\qquad 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

Factorise les trinômes ci-dessous.

$12x + 4x^3 - 8x^2 = 4x \,.\, (3 + x^2 - 2x)$

$4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$

$9a^2 - 12ab + 4b^2 = (3a - 2b)^2$

$2a - 6a^2 + 4a^3 = 2a \,.\, (1 - 3a + 2a^2)$

$21a^3 - 7a + 14a^2 = 7a \,.\, (3a^2 - 1 + 2a)$

$9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$

$4a^2 + 6ab + 4a = 2a \,.\, (2a + 3b + 2)$

$20xy + 25x^2 + 4y^2 = (5x + 2y)^2$

$4x^2 + 4x + 4 = 4 \,.\, (x^2 + x + 1)$

$49 - 28x + 4x^2 = (7 - 2x)^2$

$2x^2 + 4 - 2x = 2 \,.\, (x^2 + 2 - x)$

$6a^2b - 4ab^2 - 2ab = 2ab \,.\, (3a - 2b - 1)$

$25a^2 + 16b^2 + 40ab = (5a + 4b)^2$

$9x^2 + 6xy + 9x = 3x \,.\, (3x + 2y + 3)$

$36a^2 - 60ab + 25b^2 = (6a - 5b)^2$

$5x^2 + 25x + 20xy = 5x \,.\, (x + 5 + 4y)$