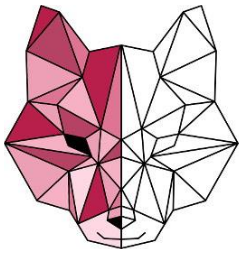
Collège Saint-Barthélemy
Y. Michiels

Mathématique – Troisième année

UAA1 – Figures isométriques et semblables



Triangles isométriques

OBJECTIFS – UAA1 : Figures isométriques et figures semblables

Connaitre

- Cerner les données minimales qui permettent de reproduire un triangle donné.
- Reconnaitre des triangles isométriques et justifier à l'aide du cas d'isométrie adéquat.
- Transposer une démonstration faite en classe à propos d'un énoncé analogue.

Appliquer

- Construire une figure isométrique à une autre en utilisant les instruments adéquats.

Transférer

- Démontrer que deux triangles sont isométriques pour en dégager une propriété.
- Prouver une égalité de longueurs ou d'angles en utilisant les cas d'isométrie des triangles et des propriétés déjà établies (angles, triangles particuliers, médiane, médiatrice, bissectrice, quadrilatères particuliers).
- Résoudre un problème de géométrie, de construction ou de calcul dans des situations faisant appel aux triangles isométriques.

EXPLORATION : DES TRIANGLES SUPERPOSABLES…

1. Un triangle ABC comporte six mesures :

- ✓ Trois amplitudes d'angles : $\hat{A}°$; $\hat{B}°$ et $\hat{C}°$;
- ✓ La longueur de ses trois côtés : $\overline{AB}$; $\overline{BC}$ et $\overline{AC}$.

Consigne 1

Matériel reçu : un triangle en carton numéroté par groupe

- ✓ Rédigez un message contenant le minimum de renseignements sur votre triangle qui permettra à un autre groupe qui n'a jamais vu le triangle de reproduire « exactement le même ».
- ✓ Pouvez-vous construire d'autre(s) message(s) ?

Consigne 2

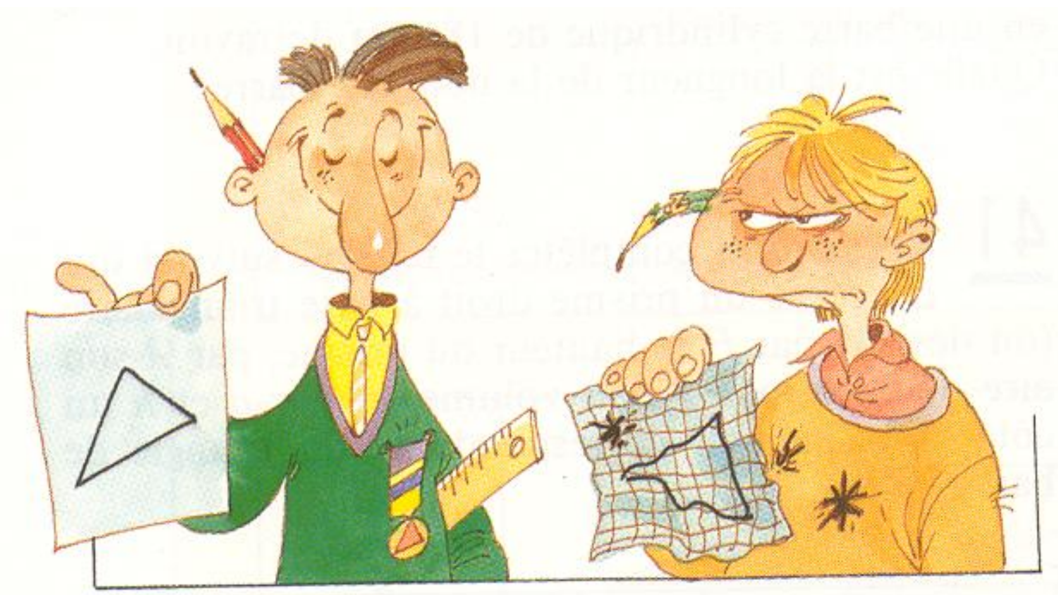
Matériel reçu : un message d'un autre groupe et un papier calque

- ✓ Reproduisez sur le papier claque un triangle qui répond aux données du message que vous avez reçu.
- ✓ Si le message reçu ne vous permet pas de construire un triangle ou au contraire vous permet d'en construire plusieurs, prouvez-le.
- ✓ Si vous pensez qu'il y a trop de données, précisez lesquelles.

Consigne 3

Matériel reçu : un triangle en carton numéroté par groupe

- ✓ Les triangles en carton sont collés au tableau. Un élève de chaque groupe vient essayer de superposer le triangle dessiné sur le papier calque avec le triangle en carton correspondant. Ensuite, il écrit le message reçu et le commente.



2. Analyse

1] Combien de renseignements dois-tu donner au minimum à ton voisin pour qu'il puisse reproduire ton triangle ?

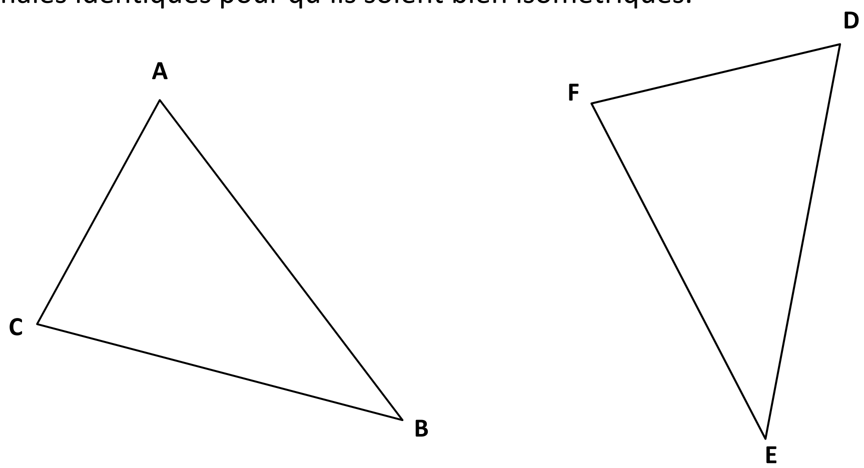
2] Combien y a t'il de cas ***différents*** ? Pour chaque cas, complète une phrase du type : « Deux triangles quelconques sont superposables, si ils ont… »

3] Envisage ensuite le cas des triangles rectangles !

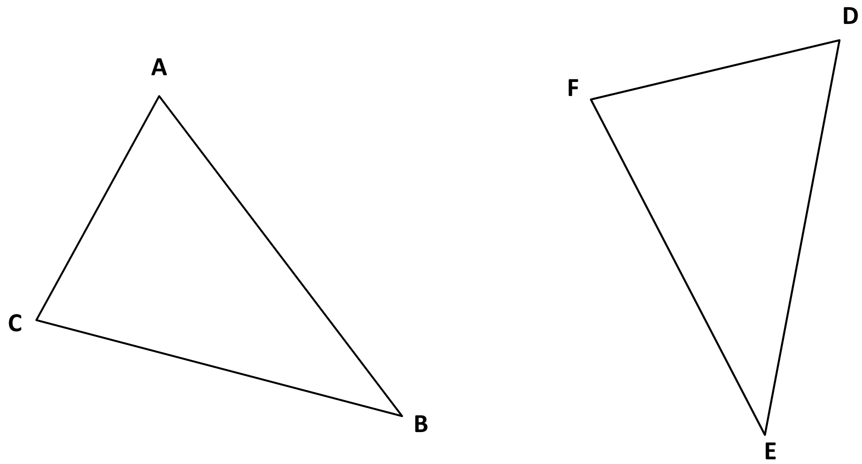
3. Synthèse

Illustre chaque critère noté ci-dessous en « coloriant ou repassant» dans les deux triangles les données minimales identiques pour qu'ils soient bien isométriques.

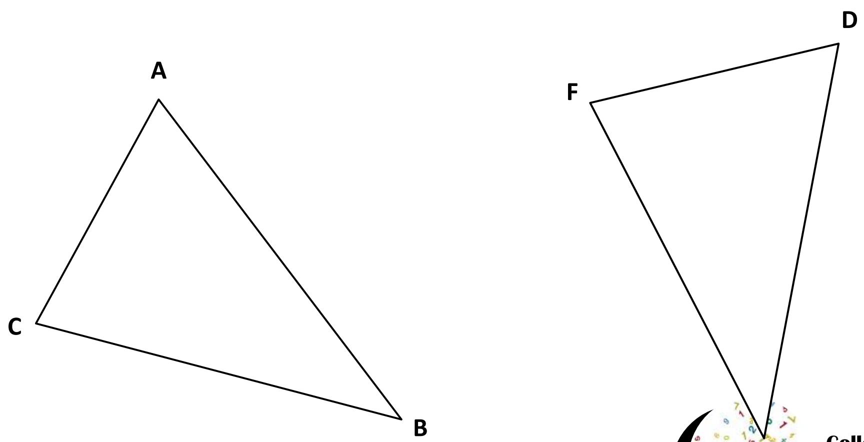
C – C – C :



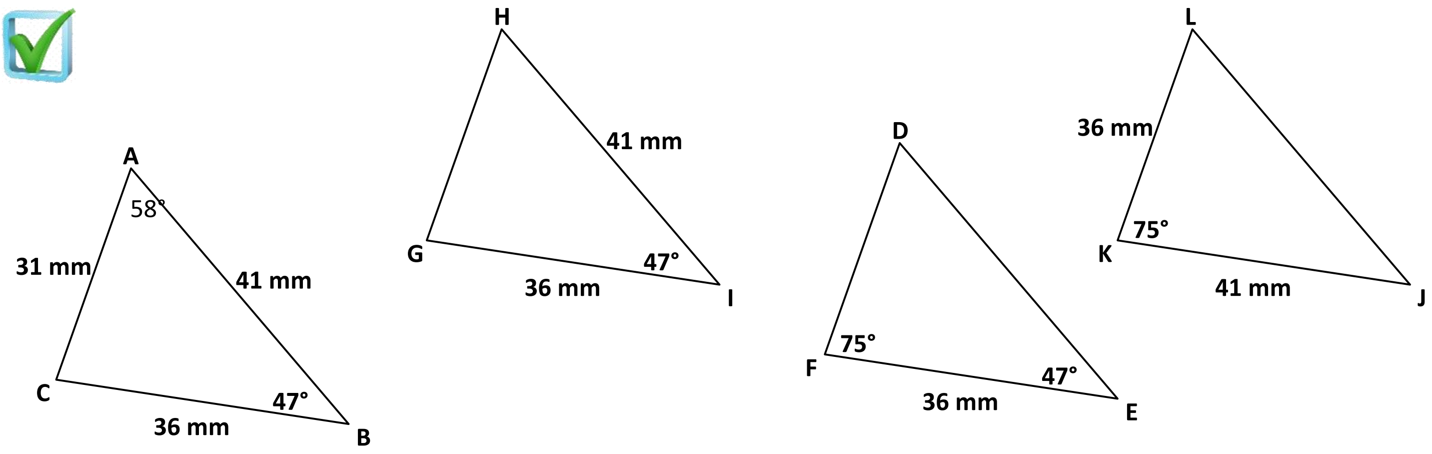
C – A – C :



A – C – A :



4. Parmi les triangles ci-dessous, trois sont isométriques (les dessins sont volontairement faux). Lesquels ? Justifie en énonçant chaque fois le critère que tu utilises.



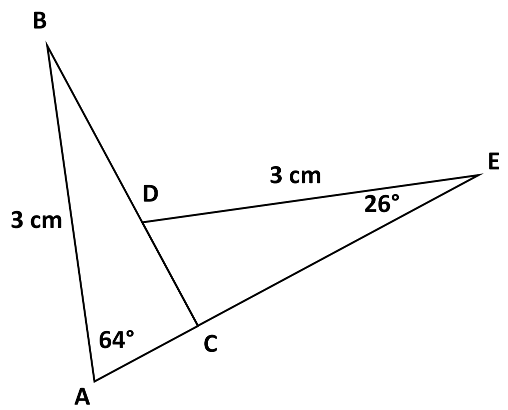
Triangle ______ iso Triangle ______ car ....

....

Triangle ______ iso Triangle ______ car ....

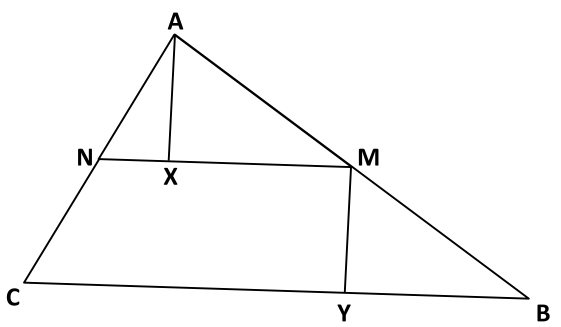
....

5. Sur le dessin ci-contre, les droites BC et AE sont perpendiculaires. Enonce le cas d'isométrie qui permet de prouver que les triangles ABC et CDE sont isométriques.



6. <u>**Exercices de recherches de triangles isométriques**</u> :

1] Dans le triangle quelconque ABC, trace MN parallèlement à BC avec M milieu de [AB] et N sur [AC]. Trace ensuite [AX] perpendiculairement à [NM] et [MY] perpendiculairement à [BC]. Trouve une paire de triangles isométriques et prouve qu'ils le sont en utilisant un critère.



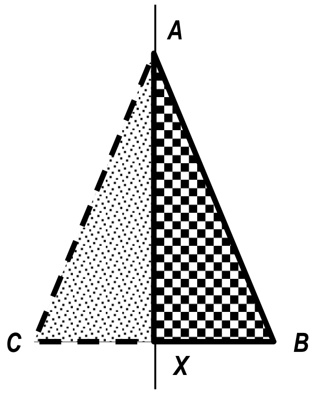
2] **Exemple de démonstration** :

Dans un triangle isocèle, la bissectrice de l'angle au sommet est aussi médiane de la base.

Pour bien différencier hypothèse et thèse, tu peux « traduire » l'énoncé par un schéma :

Si Δ isocèle et bissectrice de l'angle au sommet **Alors** cette droite = médiane de la base

Hypothèses	**Thèse**
Δ ABC $\overline{AB} = \overline{AC}$ $C\hat{A}X° = B\hat{A}X°$	$\overline{XB} = \overline{XC}$



Démonstration

Montrons que les deux triangles $\Delta\, ACX$ et $\Delta\, ABX$ sont isométriques :

- C $\overline{XA} = \overline{XA}$ $\square_1$
- A $X\hat{A}C° = X\hat{A}B°$ $\square_2$
- C $\overline{AB} = \overline{AC}$ $\square_3$

$\Rightarrow \Delta\, ACX$ iso $\Delta\, ABX$ $\square_4$

$\Downarrow \square_5$

$$\boxed{\overline{XB} = \overline{XC}}$$

Justifications

$\square_1$: ***Côté commun***

$\square_2$: ***La bissectrice d'un angle divise l'angle en deux angles de même amplitude (par hypothèse)***

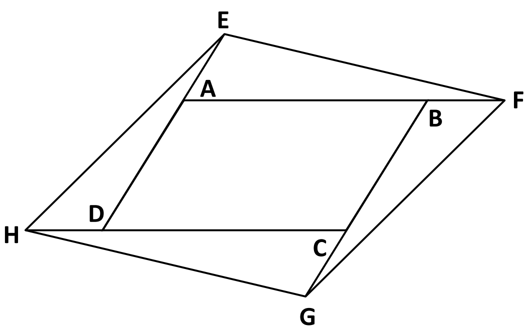
$\square_3$: ***Par hypothèse***

$\square_4$: ***Si deux triangles ont un angle de même amplitude compris entre deux côtés homologues de même longueur, alors ils sont isométriques (C - A - C)***.

$\square_5$: ***Les côtés homologues de deux triangles isométriques ont la même longueur.***

Tu peux aussi utiliser le critère A $\left(\hat{C}° = \hat{B}°\right)$ *– C (* $\overline{AB} = \overline{AC}$ *) – A (*$X\hat{A}C° = X\hat{A}B°$*) pour justifier que les triangles sont iso.*

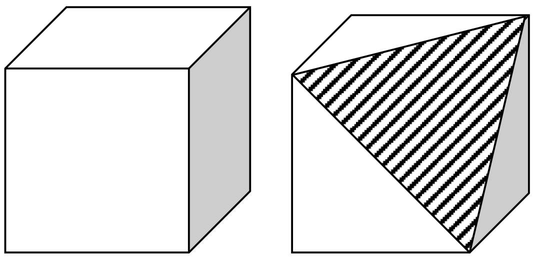
3] Soit le parallélogramme ABCD. En tournant toujours dans le même sens, prolonge chaque côté d'une même longueur. Cite les triangles qui sont isométriques et prouve-le en utilisant un des critères d'isométries. Que peux-tu en déduire pour le quadrilatère EFGH ?

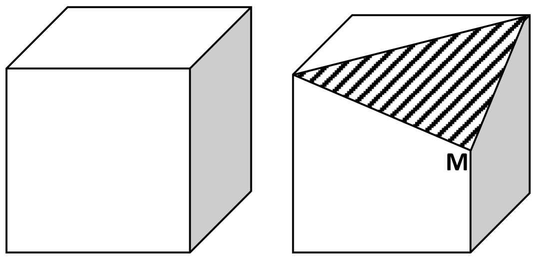


4] Dans un triangle équilatéral ABC, trace la hauteur [AD]. Du point D, abaisse les perpendiculaires sur les deux autres côtés. Ces perpendiculaires coupent respectivement [AB] en X et [AC] en Y. Trouve des paires de triangles isométriques et prouve à chaque fois qu'ils le sont en utilisant un des critères.

5] Dans chaque cas, on a sectionné un cube par un plan :

- ✓ Détermine la nature des sections (triangles) obtenues.
- ✓ Prouve-le en utilisant un des critères d'isométries.





M est le milieu de l'arête

🕮*Synthèse sur triangles isométriques*

SYNTHESE : TRIANGLES ISOMETRIQUES

1. FIGURES ISOMETRIQUES : VOCABULAIRE

Deux figures sont ***superposables*** si, après avoir décalqué l'une, on peut la superposer à l'autre.

Si, pour obtenir la superposition, on doit retourner le calque, on dira que les deux figures sont images l'une de l'autre par un ***retournement***.
Si, pour obtenir la superposition, il suffit de faire glisser ou/et tourner le calque sans sortir du plan de la feuille, on dira que les deux figures sont images l'une de l'autre par un ***déplacement***.

Deux figures superposables sont dites ***isométriques*** car elles se correspondent point par point et que la distance entre deux points quelconques de l'une égale la distance entre les deux points correspondants de l'autre.

Lors de la superposition parfaite de deux figures, on appelle :

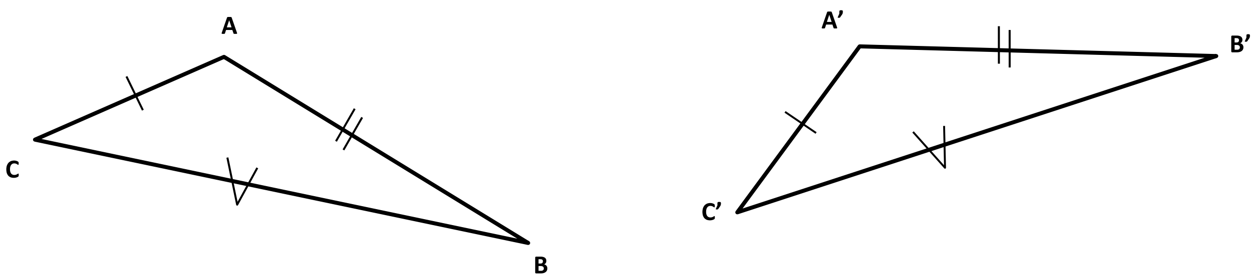
- côtés ***homologues***, les côtés qui se superposent ;
- angles ***homologues***, les angles qui se superposent ;
- sommets ***homologues***, les sommets qui se superposent.

2. TRIANGLES ISOMETRIQUES

2.1. Cas d'isométries des triangles quelconques

2.1.1. *Théorème CCC (côté – côté – côté)*

Si deux triangles ont leurs côtés homologues isométriques (de même longueur), alors ils sont isométriques.



Si $\left.\begin{array}{l}\overline{AB}=\overline{A'B'}\\ \overline{AC}=\overline{A'C'}\\ \overline{BC}=\overline{B'C'}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ABC \text{ iso } \Delta A'B'C'$

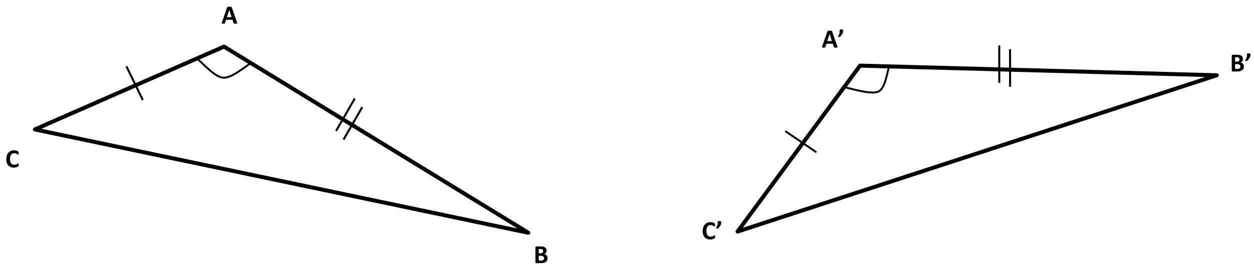
Remarque : A partir de là, on peut donc déduire que : $\hat{A}^\circ=\hat{A}'^\circ$; $\hat{B}^\circ=\hat{B}'^\circ$ et $\hat{C}^\circ=\hat{C}'^\circ$ 🗀1

🗀1 : ***Les angles homologues de deux triangles isométriques ont la même amplitude***

Collège Saint-Barthélemy
Y. Michiels
Mathématique – Troisième année

2.1.2. *Théorème CAC (côté – angle – côté)*

Si deux triangles ont un angle de même amplitude compris entre deux côtés homologues de même longueur, alors ils sont isométriques.

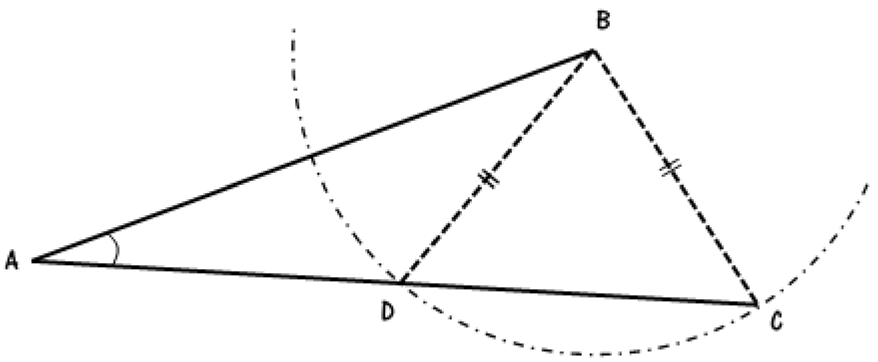


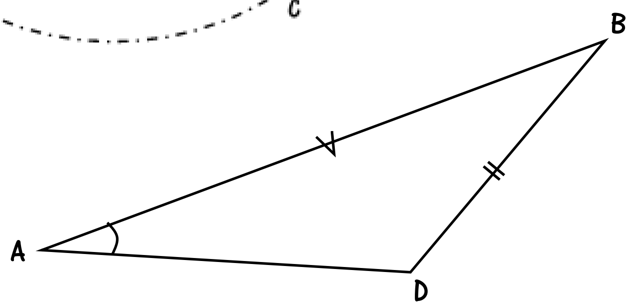
$$\textbf{\textit{Si}}\ \left.\begin{array}{l}\overline{AB}=\overline{A'B'}\\ \hat{A}^\circ=\hat{A}'^\circ\\ \overline{AC}=\overline{A'C'}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ABC \text{ iso } \Delta A'B'C'$$

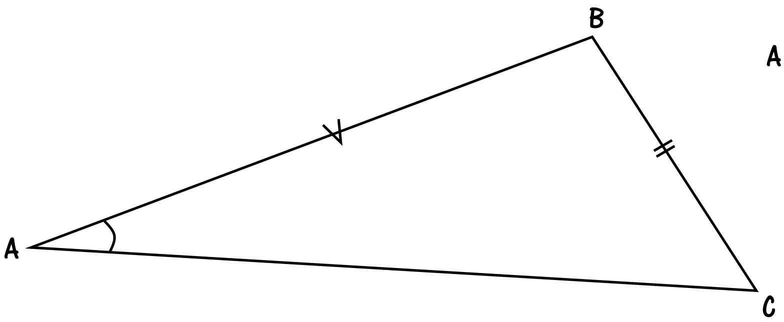
Remarque : A partir de là, on peut donc déduire que : $\overline{BC}=\overline{B'C'}$; $\hat{B}^\circ=\hat{B}'^\circ$ et $\hat{C}^\circ=\hat{C}'^\circ$ ☐2

☐2 : ***Les côtés homologues de deux triangles isométriques ont la même longueur et les angles homologues de deux triangles isométriques ont la même amplitude***

Pourquoi l'angle (de même amplitude) **doit-il être adjacent aux deux côtés** (homologues de même longueur)**?**



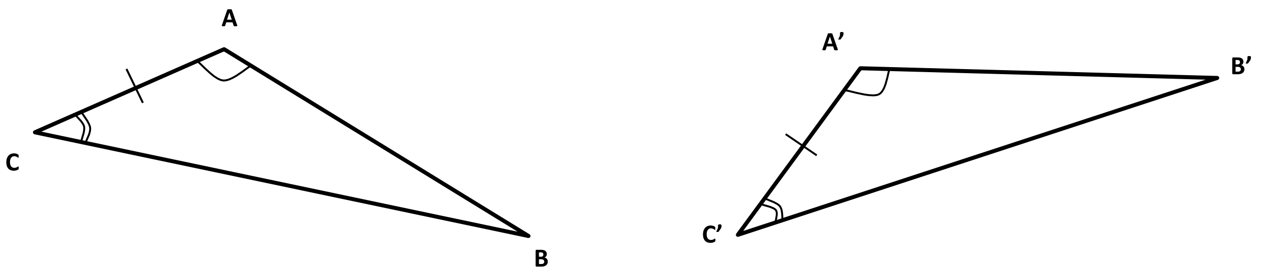




Les triangles ABC et ABD ont deux côtés homologues de même longueur ($\overline{AB}$ et $\overline{BC}$) et un angle de même amplitude ($\widehat{BAC}$). Pourtant ils ne sont pas isométriques.

2.1.3. ***Théorème ACA (angle – côté – angle)***

Si deux triangles ont un côté de même longueur, adjacent à deux angles homologues de même amplitude, alors ils sont isométriques.

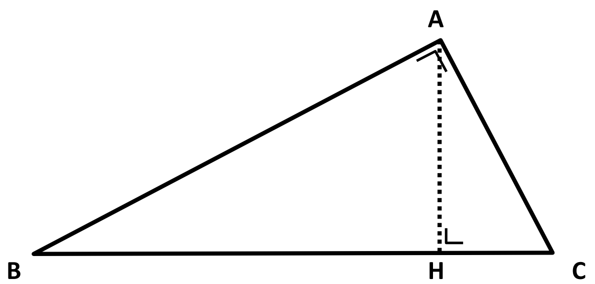


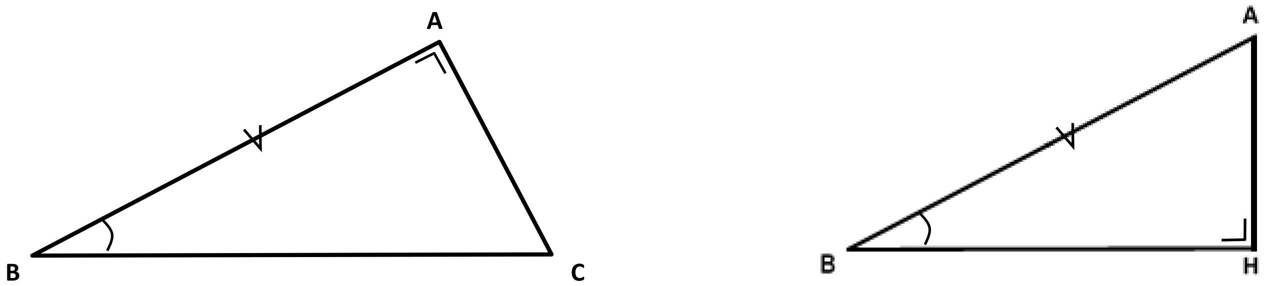
$$\textbf{\textit{Si}} \left.\begin{array}{l} \hat{A}^\circ = \hat{A}'^\circ \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \hat{C}^\circ = \hat{C}'^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \text{ iso } \Delta A'B'C'$$

<u>Remarque</u> : A partir de là, on peut donc déduire que : $\overline{BC} = \overline{B'C'}$; $\hat{B}^\circ = \hat{B}'^\circ$ et $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ 2

2 : ***Les côtés homologues de deux triangles isométriques ont la même longueur et les angles homologues de deux triangles isométriques ont la même amplitude***

<u>**Pourquoi les angles (homologues de même amplitude) doivent-ils être adjacents au côté (de même longueur) ?**</u>





Les triangles ABC et ABH ont un côté de même longueur ($\overline{AB}$) et deux angles homologues de même amplitude ($\widehat{ABC}$ *et un angle droit*). Pourtant ils ne sont pas isométriques.

2.2. Cas d'isométries des triangles rectangles

2.2.1. *Théorème HA$_{igu}$*

Si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse de même longueur et un angle aigu de même amplitude, alors ils sont isométriques.

2.2.2. *Théorème HC*

Si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse de même longueur et un côté de l'angle droit de même longueur, alors ils sont isométriques.

2.3. Utilisation des critères d'isométrie dans les démonstrations

Dans un exercice où ***tu dois prouver que deux segments ont la même longueur ou deux angles ont la même amplitude***, il faut :

- trouver deux triangles qui contiennent chacun un des deux segments (angles).
- retirer les informations connues (*hypothèses*) concernant ces deux triangles afin de démontrer qu'ils sont isométriques (C-C-C ; C-A-C ; A-C-A ; H-A ; H-C).
- en déduire l'égalité demandée (*thèse*).

2.4. Schéma de démonstration

Dessin

Hypothèse

Données, propriétés des figures,…

Thèse

Propriété à démontrer

Démonstration

Montrons que les deux triangles Δ………. et Δ………. sont isométriques :

- **C** ………. = ……….
- **A** ………. = ……….
- **C** ………. = ……….

$\Rightarrow$ Δ………. iso Δ……….

□$_1$

$\Downarrow$ □$_2$

$\boxed{\text{………. = ……….}}$

ce qui se trouve dans la thèse

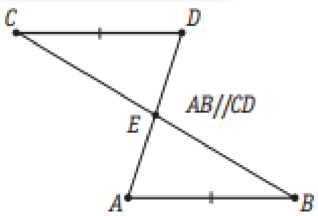
□$_1$: ***Enoncé d'un des critères (deux triangles sont isométriques…)***

□$_2$: ***Les côtés homologues de deux triangles isométriques ont la même longueur (ou les angles homologues de deux triangles isométriques ont la même amplitude)***

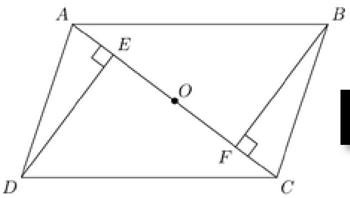
3. EXERCICES

1] En utilisant les renseignements fournis sur les figures suivantes, démontre « rapidement » (critères, codages et justifications simples) que les triangles cités sont isométriques :

❶ ΔABE et ΔEDC



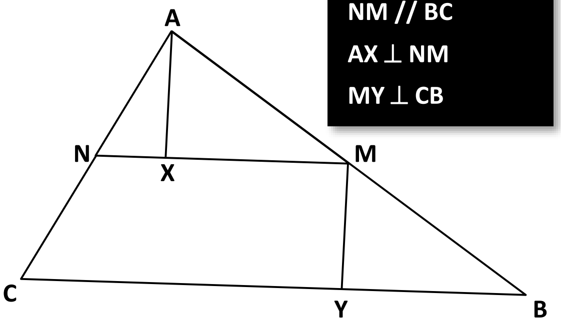
❷ ΔADE et ΔCBF



ABCD parallél.

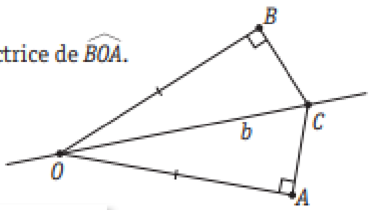
❸ ΔAXM et

M miieu de [AB]
NM // BC
AX ⊥ NM
MY ⊥ CB

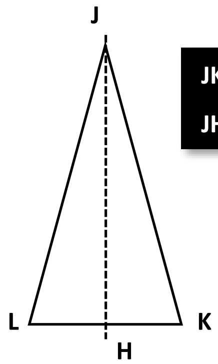


❹ ΔOBC et ΔOAC

b est bissectrice de $\widehat{BOA}$.

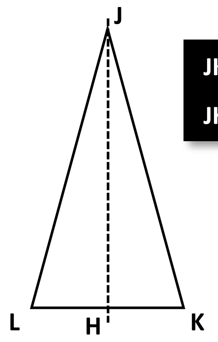


❺ ΔJKH et ΔJLH



JKL isocèle
JH médiane

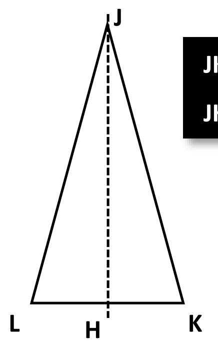
❻ ΔJKH et ΔJLH



JKL isocèle

JH hauteur

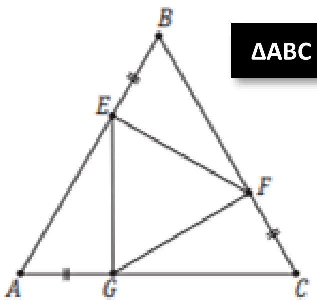
❼ ΔJKH et ΔJLH



JKL isocèle

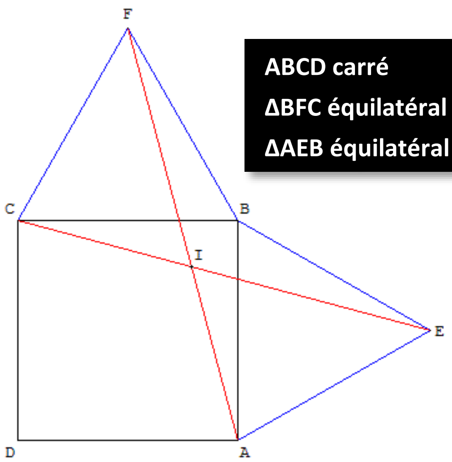
JH bissectrice

❽ ΔBEF et ΔFCG



ΔABC équilatéral

❾ ΔABF et ΔEBC



ABCD carré

ΔBFC équilatéral

ΔAEB équilatéral

2] Les hauteurs relatives aux côtés de même longueur d'un triangle isocèle sont isométriques.

3] Les bissectrices des angles à la base d'un triangle isocèle ont la même longueur.

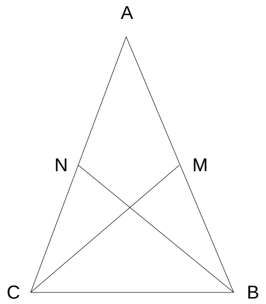
4] Si, dans un triangle, la bissectrice d'un angle est en même temps hauteur relative au côté opposé alors ce triangle est isocèle. (Tu peux en inventer d'autres similaires à celle-ci et les démontrer)

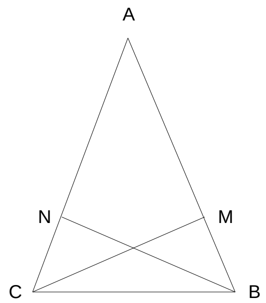
5] Soit le triangle isocèle XYZ de sommet X. Prolonge [XY en [YT] et [XZ en [ZR] de telle sorte que $\overline{YT} = \overline{ZR}$. Trace ensuite TZ et YR qui se coupent en O. Démontre que :

$$\overline{TZ} = \overline{YR}$$
$$\overline{OT} = \overline{OR}$$

6] Tout diamètre d'un cercle perpendiculaire à une corde passe par le milieu de cette corde.

7] Ecris l'énoncé qui correspond aux données exprimées par ces dessins puis démontre-les.

Données	***Thèse***
$\overline{AM} = \overline{MB}$ $\overline{AN} = \overline{NC}$  	$\overline{CM} = \overline{BN}$

Données	***Thèse***
$\overline{CN} = \overline{MB}$  	$\overline{CM} = \overline{BN}$

8] Dans un triangle isocèle la hauteur relative à la base est aussi bissectrice de l'angle au sommet.

9] Dans un triangle isocèle la médiane de la base est aussi bissectrice de l'angle au sommet.

10] Dans un triangle isocèle la bissectrice de l'angle au sommet est aussi la hauteur relative à la base.

11] Dans un triangle isocèle la médiane de la base est aussi la hauteur relative à cette base.

12] Dans un triangle isocèle la hauteur relative à la base est aussi médiane de cette base.

13] Dans un triangle isocèle la bissectrice de l'angle au sommet. est aussi médiane de la base.

14] Dans un triangle isocèle, les longueurs des hauteurs relatives aux côtés isométriques sont de mêmes longueurs.

15] Dans un triangle isocèle, les longueurs des médianes relatives aux côtés isométriques sont de mêmes longueurs.

16] Dans un triangle isocèle, les longueurs des bissectrices des angles à la base sont de mêmes longueurs.

17] Dans un triangle si la bissectrice d'un angle est aussi hauteur, alors ce triangle est isocèle.

18] Dans un triangle si une médiane est aussi hauteur, alors ce triangle est isocèle.

19] Dans un triangle si deux hauteurs sont de même longueur, alors ce triangle est isocèle.

20] Dans un triangle isocèle ABC, on porte sur les côtés de même longueur [AB] et [AC] des segments [AX] et [AY] de même longueur. Le point O étant le point d'intersection de [CX] et [BY], démontre que BOC est un triangle isocèle.

21] Dans un triangle ABC, on trace la médiane AM ; on trace BD et CF perpendiculairement à cette médiane avec D et F qui lui appartiennent. Démontre que [BD] et [CF] sont de même longueur.

22] Extérieurement au triangle ABC, on construit les triangles équilatéraux ABX et ACY. Démontre que les segments [CX] et [BY] sont de même longueur.

23] Dans un triangle isocèle ABC, on porte sur les côtés de même longueur [AB] et [AC] des segments [AX] et [AY] qui sont de même longueur. Démontre que les segments [XC] et [YB] sont de même longueur.

24] Dans un triangle quelconque ABC, on trace MN // BC, avec M milieu de [BC] et N $\in$ [AC]. On construit [AX] $\perp$ [MN] et [MY] $\perp$ [BC]. Démontre que les segments [XM] et [YB] sont de même longueur.

25] Les diagonales du parallélogramme ABCD se coupent en M. Par les sommets A et C, on trace respectivement les perpendiculaires [AP] et [CQ] à la diagonale [BD]. Démontre que $\overline{AP} = \overline{CQ}$.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES
MATH POUR RÉUSSIR : PAGES 114 À 120