COLLEGE SAINT-BARTHELEMY

MATHEMATIQUE

Troisième année

Synthèse 1 – 2

Calculs algébriques.. *Pg 1*
Géométrie.. *Pg 9*
Périmètres, aires et volumes.. *Pg 19*

Cours Y. Michiels - Collège Saint-Barthélemy - LIEGE

Calcul Algébrique : Synthèse

1. SOMME DE TERMES IDENTIQUES

Nous savons que :

$$5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times 5$$

Une somme de termes identiques peut s'écrire sous la forme d'un produit. Il en va de même pour le calcul algébrique :

$$a + a + a = 3a$$

$$ax + ax + ax + ax + ax = 5ax$$

$$b^2 + b^2 + b^2 = 3b^2$$

Dans l'expression ***3a*** ; "***3***" est appelé **coefficient** et indique le nombre de **termes** identiques.

2. REDUCTION DE TERMES SEMBLABLES

Exemples :

$$\begin{aligned} a + 3a + a + 2a &= a + (a + a + a) + a + (a + a) \\ &= a + a + a + a + a + a + a \\ &= 7a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2ab + 3ab &= (ab + ab) + (ab + ab + ab) \\ &= ab + ab + ab + ab + ab \\ &= 5ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x^2 + x^2 &= (x^2 + x^2 + x^2 + x^2) + x^2 \\ &= x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + x^2 \\ &= 5x^2 \end{aligned}$$

$$2a + 5b + 9a + 6ab = 11a + 5b + 6ab$$

Dans une addition, on n'additionne que ***les termes semblables***, c'est-à-dire les termes qui ont la même partie littérale.

3. PRODUIT DE FACTEURS IDENTIQUES

Nous savons que :

$$5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 5^4$$

Un produit de facteurs identiques peut s'écrire sous la forme d'une puissance. Il en va de même pour le calcul algébrique :

$$a \,.\, a \,.\, a = a^3$$

$$ax \,.\, ax \,.\, ax \,.\, ax \,.\, ax = (ax)^5$$

$$b^2 \,.\, b^2 \,.\, b^2 = (b^2)^3$$

Dans l'expression $\boldsymbol{a^3}$; "***3***" est appelé **exposant** et indique le nombre de **facteurs** identiques.

4. REDUCTION DE PRODUITS SIMPLES

Dans le calcul algébrique, pour réduire un produit, on utilise les propriétés de commutativité et d'associativité :

$$\begin{aligned} 2a \,.\, (-3b) &= 2.a \,.\, (-3).b \\ &= (2.(-3)) \,.\, (a.b) \\ &= -6ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5a \,.\, a &= 5.a \,.\, a \\ &= 5 \,.\, (a.a) \\ &= 5a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2xy \,.\, x &= 2.x.y \,.\, x \\ &= 2 \,.\, (x.x).y \\ &=2x^2y \end{aligned}$$

5. REDUCTION D'EXPRESSIONS PLUS COMPLEXES

5.1. « Règles des parenthèses »

$$3a^2 + (5a^2 - 4ab + 3b^2) - (-8a^2 + 6ab - 5b^2) = 3a^2 + 5a^2 - 4ab + 3b^2 + 8a^2 - 6ab + 5b^2$$
$$= 16a^2 - 10ab + 8b^2$$

5.2. Règles des puissances

1] $5^0 = (-3)^0 = \left(\frac{1}{5}\right)^0 = (-3{,}21)^0 = \ldots = 1$

2] $(-7)^2 = -7 \,.\, (-7) = 49$ et $-7^2 = -7 \,.\, 7 = -49$

3] $y^3 \,.\, y^5 = y^{3+5}$
$= y^8$

4] $(a^5)^4 = a^{5.4}$
$= a^{20}$

5] $(ax^3y^5)^4 = a^4(x^3)^4(y^5)^4$
$= a^4\,x^{12}\,y^{20}$

6] $\frac{9a^9b^7}{12a^{12}b^5} = \frac{(9_{\,:\,3})b^{7-5}}{(12_{\,:\,3})a^{12-9}}$
$= \frac{3b^2}{4a^3}$

7] $\left(\frac{-3a}{4b^3}\right)^2 = \frac{(-3a)^2}{(4b^3)^2}$
$= \frac{9a^2}{16b^6}$

8] $\left(\frac{\left(-2a^3b^5x\right)^5}{(-a^5b^6y^2)^4}\right)^2 . \frac{(-a^3bx^2)^3}{-4a^3b^4y} = \left(\frac{-32a^{15}b^{25}x^5}{a^{20}b^{24}y^8}\right)^2 . \frac{(-a^9b^3x^6)}{-4a^3b^4y}$

$$= \left(\frac{-32bx^5}{a^5y^8}\right)^2 . \frac{(-a^9b^3x^6)}{-4a^3b^4y}$$
$$= \frac{1024b^2x^{10}}{a^{10}y^{16}} . \frac{(-a^9b^3x^6)}{-4a^3b^4y}$$
$$= \frac{-1024a^9b^5x^{16}}{-4a^{13}b^4y^{17}}$$
$$= \frac{216bx^{16}}{a^4y^{17}}$$

5.3. La distributivité simple :

△.(□ + ☺) = △.□ + △.☺

1] $3a.(5a^2 - 4ab + 3b^2)$ $= 3a.(5a^2 + (-4ab) + 3b^2)$

$= 3a.5a^2 + 3a.(-4ab) + 3a.(3b^2)$

$= 15a^3 - 12a^2b + 9ab^2$

2] $-4a^3b^2.(-5a^4b - 4ab^5 + 3a)$ $= -4a^3b^2.(-5a^4b - 4ab^5 + 3a)$

$= -4a^3b^2.(-5a^4b) + (-4a^3b^2).(-4ab^5) + (-4a^3b^2).(3a)$

$= 20a^7b^3 + 16a^4b^7 - 12a^4b^2$

5.4. La double distributivité :

(△ + 🗀).(□ + ☺) = △.□ + △.☺ + 🗀.□ + 🗀.☺

1] $(2a + b).(3a + 5b)$ $= 2a.3a + 2a.5b + b.3a + b.5b$

$= 6a^2 + 10ab + 3ab + 5b^2$

$= 6a^2 + 13ab + 5b^2$

2] $(-4a^3b^2 + 3ab^3).(5a^4b - 4ab^5)$ $= (-4a^3b^2 + 3ab^3).(5a^4b + (-4ab^5))$

$= -4a^3b^2.5a^4b + (-4a^3b^2).(-4ab^5) + 3ab^3.5a^4b + 3ab^3.(-4ab^5)$

$= -20a^7b^3 + 16a^4b^7 + 15a^5b^4 - 12a^2b^8$

5.5. Carré d'un binôme

(△ + ☺)² = △² + 2.△.☺ + ☺²

1] $(5a^4b + 4a^2b^5)^2$ $= (5a^4b)^2 + 2.(5a^4b).(4a^2b^5) + (4a^2b^5)^2$

△ = $5a^4b$

☺ = $4a^2b^5$

$= 25a^8b^2 + 40a^6b^6 + 16a^4b^{10}$

2] $(3a - 2b)^2$ $= (3a + (-2b))^2$

△ = $3a$

☺ = $-2b$

$= (3a)^2 + 2.(3a).(-2b) + (-2b)^2$

$= 9a^2 - 12ab + 4b^2$

3] $(-3a - 2b)^2$ $= (-3a + (-2b))^2$

△ = $-3a$

☺ = $-2b$

$= (-3a)^2 + 2.(-3a).(-2b) + (-2b)^2$

$= 9a^2 + 12ab + 4b^2$

5.6. Produit de deux binômes conjugués

$$(\triangle + ☺).(\triangle - ☺) = \triangle^2 - ☺^2$$

1] $(5a^4b + 4a^2b^5).(5a^4b - 4a^2b^5) = (5a^4b)^2 - (4a^2b^5)^2$

$\triangle = 5a^4b$

$☺ = 4a^2b^5$

$= 25a^8b^2 - 16a^4b^{10}$

2] $(3a - 2b).(2b + 3a) = (3a)^2 - (2b)^2$

$\triangle = 3a$

$☺ = 2b$

$= 9a^2 - 4b^2$

3] $(-3a - 2b).(-2b + 3a) = (-2b)^2 - (3a)^2$

$\triangle = -2b$

$☺ = 3a$

$= 4b^2 - 9a^2$

6. SYNTHESE DES REGLES APPLIQUEES DANS LE CALCUL LITTERAL : Les priorités opératoires

Exemple :

$$\underbrace{(2a)^2(2-b)}_{1^{er}\text{ terme}} - \underbrace{(5a+2b)(2a-3b)}_{2^{ème}\text{ terme}} - \underbrace{5(a+b)(a-b)}_{3^{ème}\text{ terme}} + \underbrace{(a-2b)^2}_{4^{ème}\text{ terme}}$$

$$= \underbrace{4a^2(2-b)}_{1^{er}\text{ terme}} - \underbrace{(10a^2-15ab+4ab-6b^2)}_{2^{ème}\text{ terme}} - \underbrace{5(a^2-b^2)}_{3^{ème}\text{ terme}} + \underbrace{(a^2-4ab+4b^2)}_{4^{ème}\text{ terme}}$$

$$= 8a^2 - 4a^2b - (10a^2 - 11ab - 6b^2) - 5a^2 + 5b^2 + a^2 - 4ab + 4b^2$$

$$= 8a^2 - 4a^2b - 10a^2 + 11ab + 6b^2 - 5a^2 + 5b^2 + a^2 - 4ab + 4b^2$$

$$= -6a^2 - 4a^2b + 7ab + 15b^2$$

En pratique… :

1] « Découper » l'expression algébrique en termes.

2] Dans chaque terme, respecter les priorités opératoires comme décrites dans la théorie page suivante (1 - 2 - 3). Dans l'exemple :
- *1er terme :* **puissance** puis **simple distributivité**
- *2ème terme :* **double distributivité**
- *3ème terme :* **produit de deux binômes conjugués**
- *4ème terme :* **carré d'un binôme**.

3] Appliquer les **règles des parenthèses** s'il en reste (4).

4] **Additionner les termes semblables** et uniquement les termes semblables (5).

De manière générale… :

A ce stade de la matière, nous réduirons dans l'ordre si c'est possible

1. **Les parenthèses** : Ces parenthèses indiquent ce qu'il faut d'abord calculer. A l'intérieur de celles-ci, on respectera l'ordre de priorité décrit dans cette synthèse.
2. **Les puissances** : (voir si certaines formules peuvent s'appliquer dans l'ordre suivant ; les 5 premières permettent d'enlever les parenthèses s'il en reste).

$$1)(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$2)(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$3)\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$4)(xy)^n = x^n.y^n$$

$$5)(x^m)^n = x^{m.n}$$

$$6)\text{Calcule} \quad x^n = \underbrace{x.x.x.....x}_{\text{n facteurs}}$$

3. **Les produits** : (voir si certaines formules s'appliquent dans l'ordre suivant :)
   1) $(x+y).(x-y) = x^2 - y^2$
   2) La distributivité
      a) simple
         - à gauche : $x.(y+z) = xy + xz$
         - à droite : $(x+y).z = xz + yz$

      b) double : $(a+b).(x+y) = ax + ay + bx + by$
   3) $x^m.x^n = x^{m+n}$
   4) Recopier les facteurs littéraux de chaque termes dans l'ordre alphabétique.
   5) Calculer les produits de facteurs numériques et les placer en tête des monômes.
4. S'il reste des parenthèses, **appliquer une des quatre formules** suivantes :

$$1)x + (y+z) = x + y + z$$

$$2)x + (y-z) = x + y - z$$

$$3)x - (y+z) = x - y - z$$

$$4)x - (y-z) = x - y + z$$

5. Les sommes algébriques de termes semblables (et uniquement s'ils sont semblables).

7. SUS A L'EMBROUILLE

$2x^2 + 3x^2$	=	$(x^2 + x^2) + (x^2 + x^2 + x^2)$	ce sont deux termes semblables ; ils peuvent être additionnés
	=	$5x^2$	
$x^2 + 3x^2$	=	$1x^2 + 3x^2$	1 est neutre pour la multiplication
	=	$4x^2$	
$x^2 + x^2$	=	$1x^2 + 1x^2$	1 est neutre pour la multiplication
	=	$2x^2$	
$x^2 . x^2$	=	$(x . x) . (x . x)$	
	=	x^4	formule « produit de deux puissances de même base »
$x^2 + x^3$	=	$x . x + x . x . x$	somme irréductible (les termes ne sont pas semblables)
	$\neq$	x^5 (= $x . x . x . x . x$)	
$x^2 . x^3$	=	$x . x . x . x . x$	formule « produit de deux puissance de même base »
	=	x^5	
$2x^2 + 3x^3$	**=**	***somme irréductible***	
$2x^2 . 3x^3$	=	$(2.x.x) . (3.x.x.x)$	
	=	$2.3.x.x.x.x.x$	formule « produit de deux puissances de même base »
	=	$6x^5$	
$2x^2 + 3y^3$	**=**	***somme irréductible***	
$2x^2 . 3y^3$	=	$(2.x.x) . (3.y.y.y)$	produit réductible
	=	$2.3.x.x.y.y.y$	
	=	$6x^2y^3$	
	$\neq$	$6xy^5$ (= $6 . x . y . y . y . y . y$)	
$2x^2y^3 + 3\,x^3y^2$	**=**	***somme irréductible***	
$2x^2y^3 . 3x^3y^2$	=	$(2.x.x.y.y.y) . (3.x.x.x.y.y)$	
	=	$2.3.x.x.x.x.x.y.y.y.y.y$	
	=	$6x^5y^5$	formule « produit de puissances de même base »
$(x + y)^2$	$\neq$	$x^2 + y^2$	il manque le double produit ($x^2 + \mathbf{2xy} + y^2$)
$(x . y)^2$	=	$x . y . x . y$	
	=	x^2y^2	formule « puissance d'un produit »
$(x^2 + y^3)^2$	$\neq$	$x^4 + y^6$	il manque le double produit ($x^4 + \mathbf{2x^2y^3} + y^6$)
$(x^2 . y^3)^2$	=	$x.x.y.y.y . x.x.y.y.y$	
	=	x^4y^6	formule « puissance d'un produit »

$2a - (x + y - z) = 2a - x - y + z$

$x^2 + y^2 - (2x + 3y)^2 = x^2 + y^2 - \mathbf{(}4x^2 + 12xy + 9y^2\mathbf{)} = \ldots$ **! !Recopier les parenthèses ! !**

$x^2 + y^2 - (2x + 3y)(4x - y) = x^2 + y^2 - \mathbf{(}8x^2 - 2xy + 12xy - 3y^2\mathbf{)} = \ldots$ **! !Recopier les parenthèses ! !**

<u>Remarque</u> : pour prouver qu'une expression algébrique ***n'est pas égale*** à une autre, il suffit de trouver une valeur numérique pour laquelle l'égalité n'est pas vérifiée (contre-exemple).

x^2y^3 = (ou $\neq$) xy^5 ? ? ?

Si $x = 2$ et $y = 3$ alors $x^2y^3 = 2^2.3^3 = 4 . 27 =$ ***108***

et $xy^5 = 2 . 3^5 = 2 . 243 =$ ***486***

Donc ces deux expressions sont différentes.

8. REGLES DU CALCUL FRACTIONNAIRE

8.1. Rappel

Tout nombre entier peut s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est égal à 1.

Exemple : $5 = \frac{5}{1}$

8.2. Simplifications de fractions

Pour simplifier une fraction (rendre ses termes plus petits), on **divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre** (non nul). Si ce diviseur est le **P.G.C.D.**, la fraction obtenue est **irréductible**.

Exemple :

Forme simplifiée : $\frac{30}{45} = \frac{30\ :\ 5}{45\ :\ 5} = \frac{6}{9}$ Fraction irréductible : $\frac{30\ :\ 15}{45\ :\ 15} = \frac{2}{3}$ (car $30 \wedge 45 = 15$)

8.3. Pour additionner ou soustraire deux fractions

- Simplifier les fractions si c'est possible.
- Réduire les fractions aux mêmes dénominateurs (le P.P.C.M. des dénominateurs).
- Additionner entre-eux les numérateurs **uniquement**.
- Simplifier la fraction obtenue si cela est possible.

Exemple :

$$\frac{20}{-72} + \frac{-49}{-105} - 2 = \frac{-5}{18} + \frac{7}{15} - \frac{2}{1}$$

$$= \frac{-5.5}{18.5} + \frac{7.6}{15.6} - \frac{2.90}{1.90} \quad \text{(car } 18 \vee 15 = 90\text{)}$$

$$= \frac{-25}{90} + \frac{42}{90} - \frac{180}{90}$$

$$= \frac{-25 + 42 - 180}{90}$$

$$= \frac{-163}{90}$$

8.4. Pour multiplier deux ou plusieurs fractions

- Ecrire la fraction dont le numérateur est le produit (non calculé) des numérateurs et dont le dénominateurs est le produit (non calculé) des dénominateurs.
- Simplifier la fraction obtenue si c'est possible.
- Effectuer les multiplications au numérateur et au dénominateur.

Exemple :

$$\frac{-14}{15} \cdot \frac{-45}{-16} = \frac{-\boldsymbol{14}\ .\ (-45)}{15\ .\ (-\boldsymbol{16})}$$

$$= \frac{-\boldsymbol{7}\ .\ 3}{1\ .\ \boldsymbol{8}} \quad \text{(simplification de 14 et 16 par -2; de 45 et 15 par 15)}$$

$$= \frac{-21}{8}$$

<u>8.5.</u> <u>Pour diviser un nombre ou une fraction par une fraction</u>

- Multiplier ce nombre (ou cette fraction) par l'inverse de la fraction-diviseur.
- Appliquer les étapes du 8.4. (ci-dessus).

<u>Exemple</u> :

$$\frac{14}{15} : \frac{25}{21} = \frac{14}{15} . \frac{21}{25}$$
$$= \ldots$$

<u>8.6.</u> <u>Pour élever une fraction à une puissance</u>

- Elever son numérateur et son dénominateur à cette puissance.

<u>Exemple</u> :

$$\left(\frac{6}{7}\right)^3 = \frac{6^3}{7^3}$$

<u>8.7.</u> <u>Tableau de proportionnalité</u>

Dans un tableau, si on place toutes les valeurs qui se rapportent à une grandeur sur une même ligne et les valeurs correspondantes d'une autre grandeur sur une autre ligne et si tous les rapports obtenus sont égaux, alors ce tableau est un tableau de proportionnalité.

Dans un tableau de proportionnalité, les valeurs correspondantes des deux grandeurs, forment une ou plusieurs proportion(s).

Deux grandeurs sont directement proportionnelles ssi il existe entre elles deux coefficients de proportionnalité (l'un étant l'inverse de l'autre).

Dans un tableau de proportionnalité :

- on passe de la 1ère à la 2ème ligne en multipliant ou divisant par un même nombre appelé <u>**coefficient de proportionnalité**</u> et de la 2ème à la 1ère en multipliant ou divisant par le coefficient inverse.
- On passe d'une colonne à l'autre en multipliant ou divisant les 2 grandeurs par un même nombre.
- A la somme de deux valeurs d'une ligne correspond la somme des valeurs correspondantes de l'autre ligne.

x 3 : 2

: 16,66... x 16,66...

Nbres de litres de diesel	**6**	**18**	**9**	**6 + 9 = 15**
Nbres de Km parcouru	**100**	**?**	**150**	**100 + 150 = 250**

x 3 : 2

A partir de ce tableau, on peut écrire des proportions (égalités entre deux fractions) :

$$\frac{6}{100} = \frac{18}{x}$$

En multipliant successivement par ***100*** et par ***x*** les deux membres de l'égalité, on obtient :

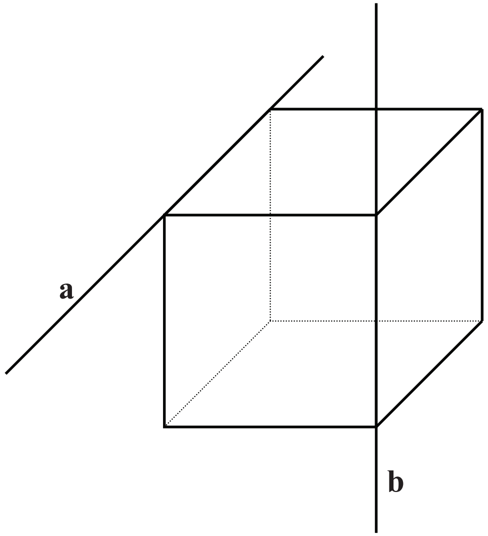
$6.x = 18.100$ **(dans une proportion, le produit des extrêmes est égal aux produit des moyens)**

Donc, $x = 300$

1. POSITIONS D'UNE DROITE PAR RAPPORT A UNE DROITE

Si deux droites ne sont pas dans un même plan, alors elles sont

Gauches

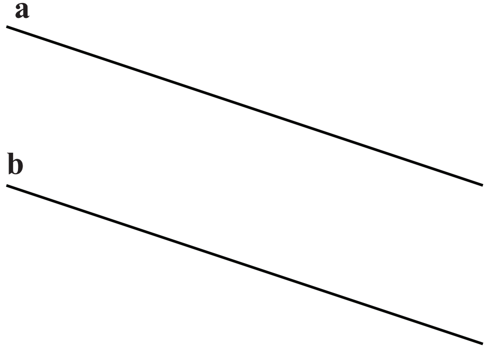


a et **b** n'ont pas de point en commun.

Si deux droites sont dans un même plan, alors elles peuvent être

Parallèles ou **Sécantes**

a // b



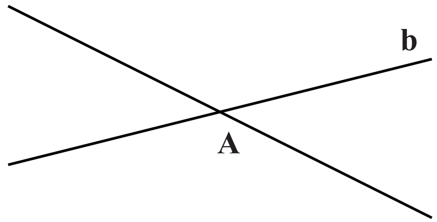
a et **b** n'ont pas de point en commun.

a et **b** ont la même direction.

Remarque:

Une droite est parallèle à elle-même.

Sécantes

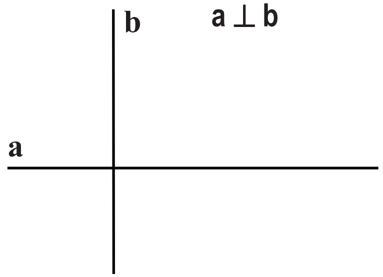


a et **b** ont un point en commun.

Cas particulier:

Deux droites sécantes peuvent être perpendiculaires.

a ⊥ b



2. POSITIONS D'UNE DROITE PAR RAPPORT A UN PLAN

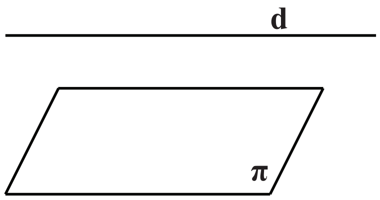
Une droite et un plan peuvent être

Parallèles

ou

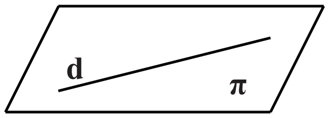
Sécants

d // **π**

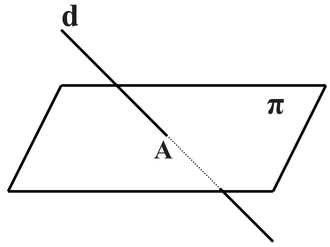


d et **π** n'ont pas de point en commun.

Cas particulier:

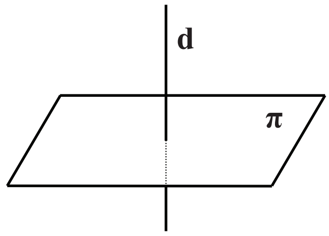


La droite **d** est dans le plan **π**.



d et **π** ont un point commun.

Cas particulier:



La droite **d** est perpendiculaire au plan **π**.

3. POSITIONS D'UN PLAN PAR RAPPORT A UN PLAN

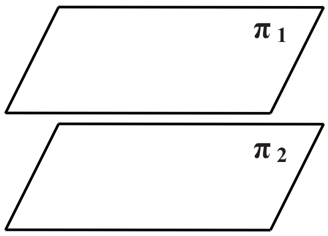
Deux plans peuvent être

Parallèles

ou

Sécants

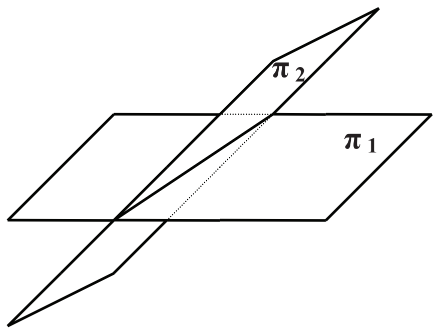
$\pi_1 // \pi_2$



π_1 et π_2 n'ont pas de point en commun.

Remarque:

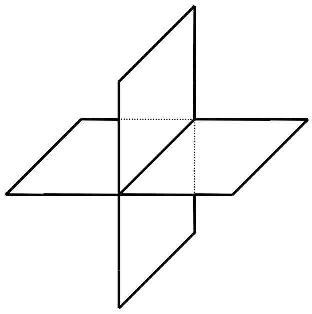
Un plan est parallèle à lui-même.



π_1 et π_2 ont une droite en commun.

Cas particulier:

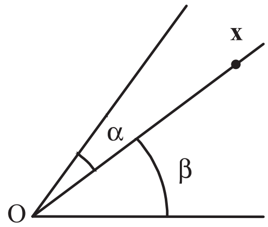
$\pi_1 \perp \pi_2$



4. A PROPOS DE QUELQUES ANGLES PARTICULIERS…

1) Angles adjacents

Deux angles sont **adjacents** ssi ils ont un côté commun et sont situés de part et d'autre de ce côté commun.



[OX est commun à α et à β et α et β sont situés de part et d'autre de **[OX**

2) Angles complémentaires

Deux angles sont **complémentaires** ssi la somme de leurs amplitudes est **90°**.

3) Angles supplémentaires

Deux angles sont **supplémentaires** ssi la somme de leurs amplitudes est **180°**.

4) Angles opposés par le sommet

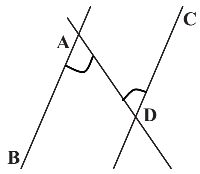
Deux angles sont **opposés par le sommet** ssi ils sont images l'un de l'autre par une symétrie centrale dont ce sommet est le centre. Ils ont la même amplitude

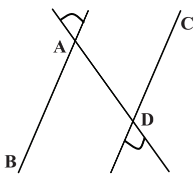
5) Angles à côtés parallèles

Deux angles à côtés directement[1] parallèles ont la même amplitude.
Deux angles à côtés inversement[2] parallèles ont la même amplitude.
Deux angles ayant respectivement un côté directement parallèle et un côté inversement parallèle sont supplémentaires.

6) Angles formés par deux parallèles et une sécante

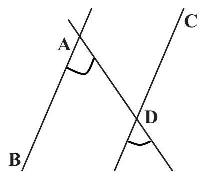
Deux angles alternes-internes formés par deux droites parallèles et une sécante commune ont la même amplitude.





Deux angles alternes-externes formés par deux droites parallèles et une sécante commune ont la même amplitude.

Deux angles correspondants formés par deux droites parallèles et une sécante commune ont la même amplitude.



7) Angles dans un triangle

Dans tout triangle, la somme des amplitudes des angles intérieurs vaut 180°.

Dans tout triangle, l'amplitude d'un angle extérieur est égale à la somme des amplitudes des angles intérieurs non adjacents.

---

[1] Directement signifie *de même sens*
[2] Inversement signifie *de sens contraires.*

5. MEDIATRICE D'UN SEGMENT

Première définition de la *médiatrice d'un segment*

Dans un plan, la médiatrice d'un segment est l'ensemble de tous les points du plan, équidistants des extrémités du segment.

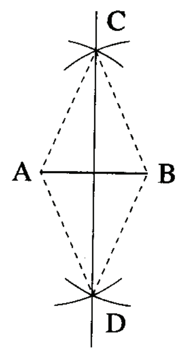
Deuxième définition de la ***médiatrice d'un segment***

Dans un plan, la médiatrice d'un segment est l'axe de symétrie de ce segment

Troisième définition de la ***médiatrice d'un segment***

Dans un plan, la médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire au milieu de ce segment.

Construction de la médiatrice d'un segment : voir dessin ci contre



6. BISSECTRICE D'UN ANGLE

Première définition de la *bissectrice d'un angle*

Dans un plan, la bissectrice d'un angle est l'axe de symétrie de cet angle.

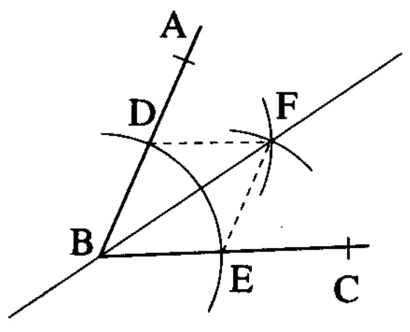
Deuxième définition de la *bissectrice d'un angle*

Dans un plan, la bissectrice d'un angle, est la droite qui divise cet angle en deux angles de même amplitude.

Troisième définition de la *bissectrice d'un angle*

Dans un plan, la bissectrice d'un angle est l'ensemble des points équidistants des côtés de l'angle.

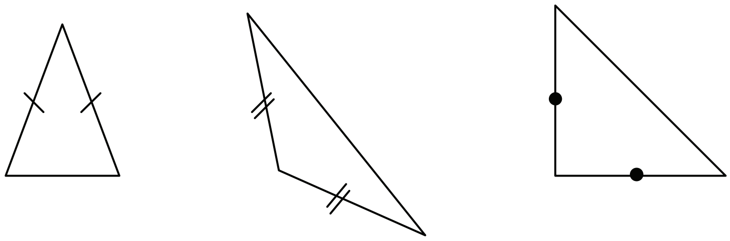
Construction de la bissectrice d'un angle



7. LES TRIANGLES

1) Triangle isocèle

Un triangle est *isocèle* ssi il a (au moins) deux côtés de même longueur



Iso / cèle

En grec :

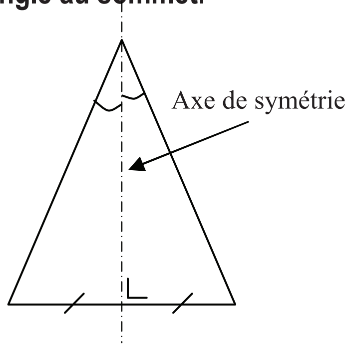
Isos qui signifie « égal » et *Skalos* qui signifie « jambe »

Remarques :

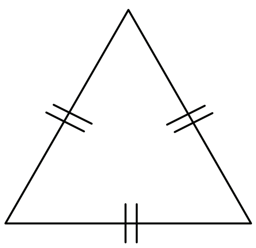
- Le côté inégal est appelé **base** du triangle, et l'angle opposé à cette base **angle au sommet**.

Propriété des triangles isocèles

Dans un triangle isocèle, la médiatrice de la base est aussi la bissectrice de l'angle au sommet (médiane et hauteur relative à la base).



2) Triangle équilatéral



Equi / latéral

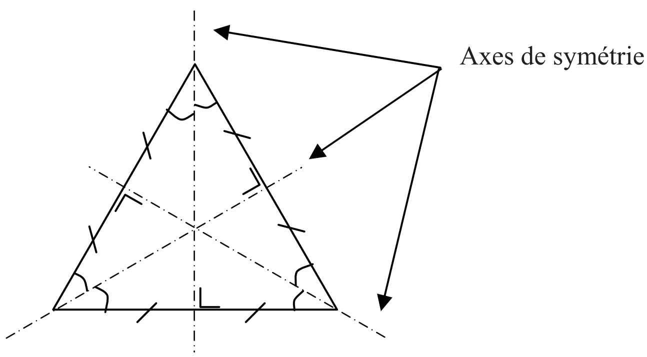
En latin :

Aequus qui signifie « égal » et *Latus* qui signifie « côté »

Un triangle est *équilatéral* ssi ses trois côtés sont de même longueur

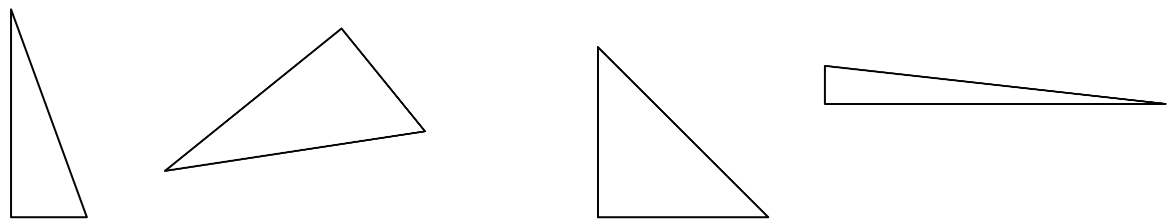
Propriété des triangles équilatéraux

Dans un triangle équilatéral, chaque médiatrice est aussi bissectrice de l'angle qu'elle coupe (médiane et hauteur relative au côté).



3) Triangle rectangle

Un triangle est rectangle ssi il possède un angle droit



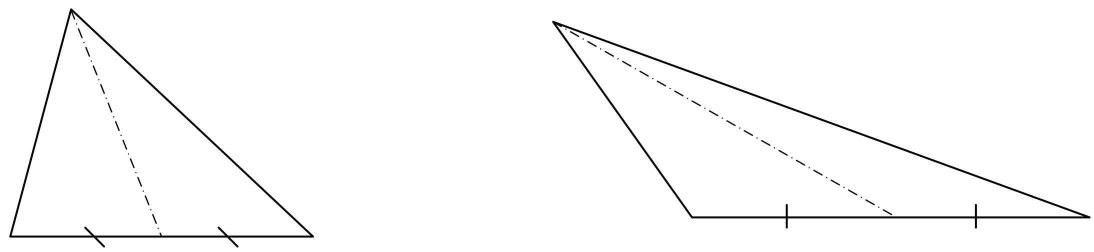
Remarques :

- Le côté opposé à l'angle droit est appelé **l'hypoténuse** du triangle rectangle ; les côtés de l'angle droit sont appelés **cathèdes**.
- Un triangle rectangle peut être isocèle.

8. DROITES REMARQUABLES DANS UN TRIANGLE.

1) Médianes d'un triangle

Une *médiane* d'un triangle est un segment qui relie un sommet au milieu du côté opposé.

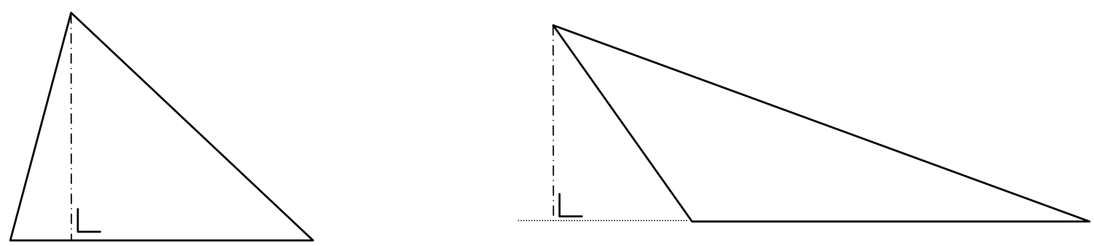


Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point appelé ***centre de gravité*** du triangle.

2) Hauteurs d'un triangle

Une *hauteur* d'un triangle est un segment abaissé d'un sommet perpendiculairement au côté opposé (ou à son prolongement).

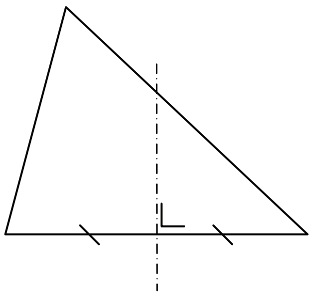
- On parlera parfois de hauteur pour désigner la droite qui contient la hauteur.

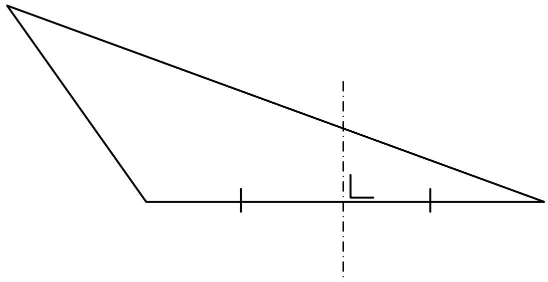


Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point appelé ***orthocentre*** du triangle.

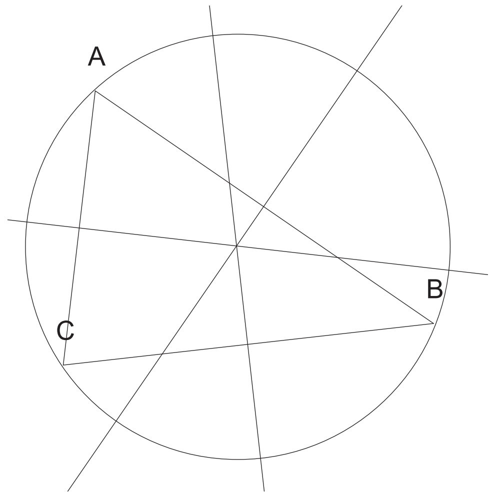
3) Médiatrices d'un triangle

Une *médiatrice* d'un triangle est une droite perpendiculaire au milieu du côté opposé.



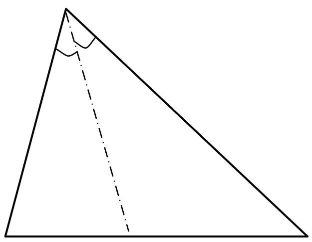


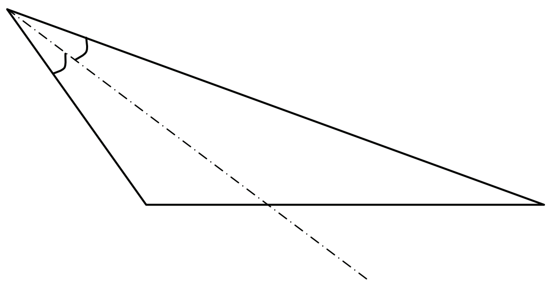
Les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un même point appelé ***centre du cercle circonscrit*** au triangle.



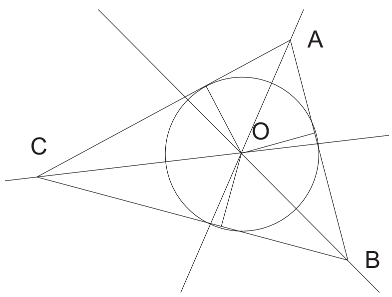
4) Bissectrices d'un triangle

Une *bissectrice* d'un triangle est une droite qui divise un angle intérieur du triangle en deux angles de même amplitude.





Les trois bissectrices d'un triangle se coupent en un même point appelé ***centre du cercle inscrit*** au triangle.



9. LES QUADRILATERES

1) Le carré

Un *carré* est un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur et ses quatre angles droits.

2) Le rectangle

Un *rectangle* est un quadrilatère qui a ses angles droits.

- Tous les carrés sont des rectangles puisqu'ils ont quatre angles droits.

3) Le losange

Un *losange* est un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur.

- Tous les carrés sont des losanges puisqu'ils ont quatre côtés de même longueur.

4) Le parallélogramme

Un *parallélogramme* est un quadrilatère qui a deux paires de côtés parallèles.

- Tous les carrés, tous les losanges et tous les rectangles sont des parallélogrammes puisqu'ils ont deux paires de côtés parallèles.
- Le mot parallélogramme se divise en deux : « gramme » d'un mot grec qui veut dire « chose écrite », « trait » et parallèle. Un parallèlogramme est formé par « des traits parallèles »

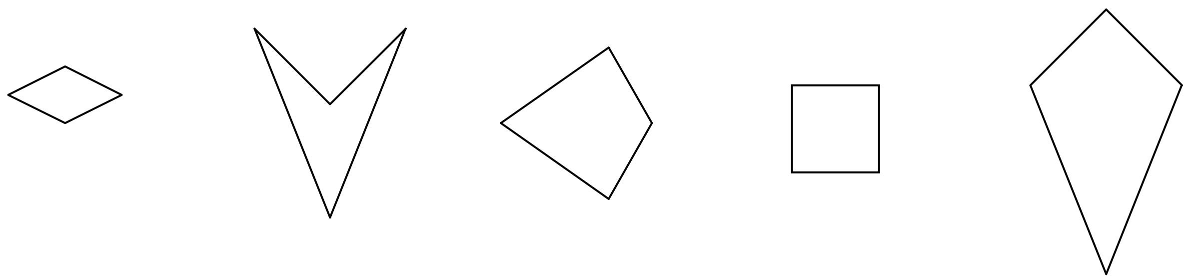
5) Le trapèze

Un *trapèze* est un quadrilatère qui a au moins deux côtés parallèles.

- Trapèze vient du grec *trapezion* qui signifie « petite table ».
- Tous les carrés, tous les losanges, tous les rectangles et tous les parallélogrammes sont des trapèzes puisqu'ils ont deux côtés parallèles

6) Le cerf-volant

Un *cerf-volant* est un quadrilatère qui possède deux paires de côtés consécutifs de même longueur.



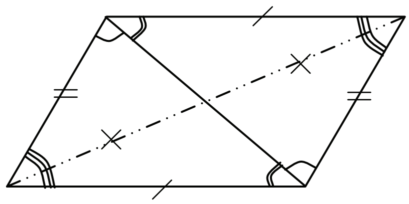
- Tous les carrés et tous les losanges sont des cerfs-volants.

10. PROPRIETES DES QUADRILATERES ET SYMETRIES

1) Le parallélogramme

En vertu des invariants des symétries centrales, plusieurs propriétés apparaissent :

- ***les côtés opposés ont la même longueur ;***
- ***les angles opposés ont la même amplitude***
- ***les diagonales se coupent en leur milieu.***

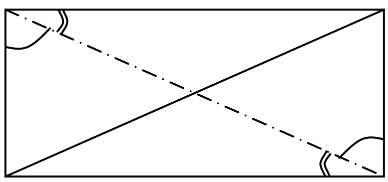


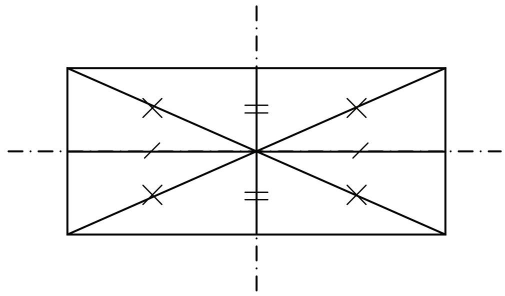
2) Le rectangle

Le rectangle a les mêmes propriétés que le parallélogramme.

Un rectangle possède aussi deux axes de symétries : ses médianes. En vertu des invariants des symétries axiales, plusieurs propriétés supplémentaires apparaissent :

- ***les diagonales ont même longueur,***
- ***les médianes sont médiatrices l'une de l'autre.***



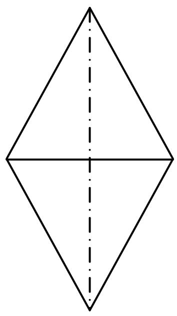


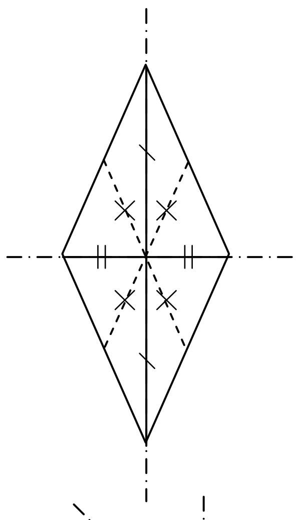
3) Le losange

Le losange a les mêmes propriétés que le parallélogramme.

Un losange possède aussi deux axes de symétries : ses diagonales. En vertu des invariants des symétries axiales, plusieurs propriétés supplémentaires apparaissent :

- ***ses médianes se coupent en leur milieu et ont même longueur ;***
- ***ses diagonales sont médiatrices l'une de l'autre et bissectrices des angles qu'elles coupent.***



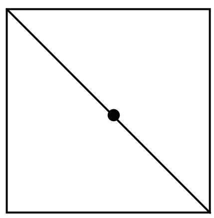


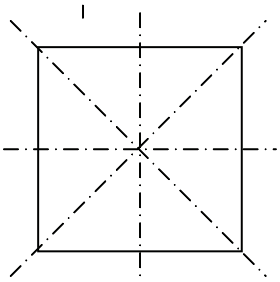
4) Le carré

Le carré a les mêmes propriétés que le rectangle et le losange.

Un carré possède quatre axes de symétries : ses diagonales et ses médianes. En vertu des invariants des symétries axiales, plusieurs propriétés supplémentaires apparaissent :

- ***ses médianes ont même longueur et sont médiatrices l'une de l'autre***
- ***ses diagonales sont médiatrices l'une de l'autre et bissectrices des angles qu'elles coupent.***



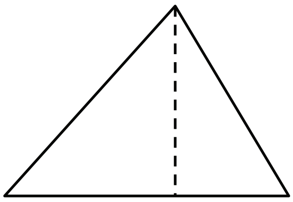
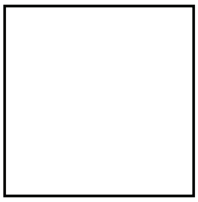
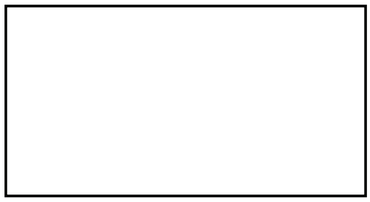
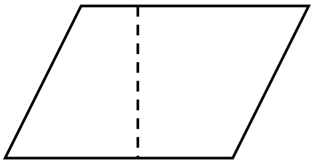
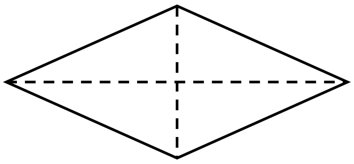
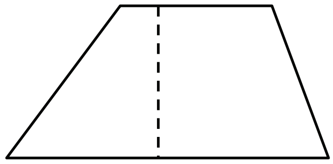
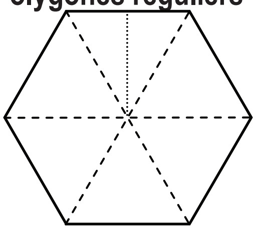
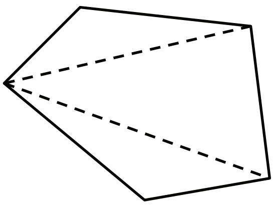
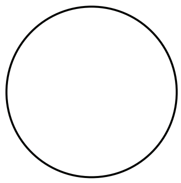
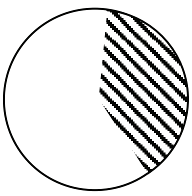
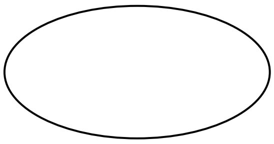


11. <u>LES SYMBOLES</u>

A	Désigne un point.
a	Désigne la droite **a**
AB	Désigne la droite qui comprend les points **A** et **B**.
[AB	Désigne la demi-droite issue de **A** et qui comprend le point **B**.
[AB]	Désigne le segment limité par les points **A** et **B**.
$\overline{AB}$	Désigne la longueur du segment [**AB**]
$\overrightarrow{AB}$	Désigne un vecteur.
ABC	Désigne le plan qui comprend les points non alignés **A**, **B** et **C**.
Δ ABC	Désigne le triangle dont les sommets sont les points **A**, **B** et **C**.
ABCD	Désigne le quadrilatère dont les sommets sont **A**, **B**, **C** et **D**.
$\forall$	se lit « ***quel que soit*** » (aussi bien au féminin qu'au pluriel)
$\in$	se lit « **appartient à** »
$\mathcal{D}$	Désigne l'ensemble de toutes les droites de l'espace
AÔB	Désigne l'angle formés par les deux demi-droites d'origine O (= sommet)
$\hat{O}_1$	Désigne l'angle de sommet O et portant le numéro 1
α	Désigne l'angle marqué « **α** ».
AÔB° ($\hat{O}_1$° ou □°)	Désigne la mesure de l'angle.

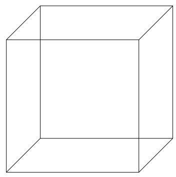
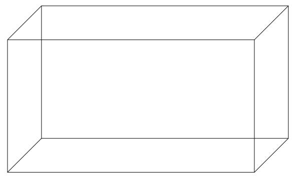
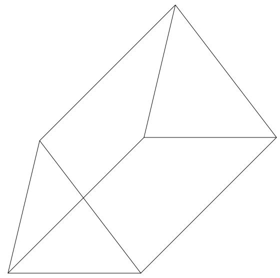
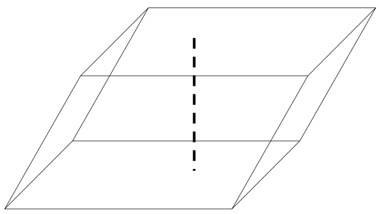
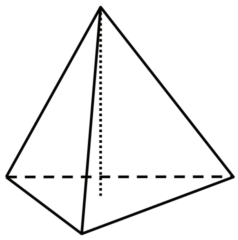
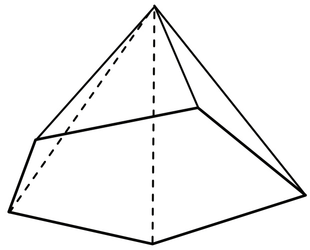
Périmètres, aires et volumes

1. SURFACES PLANES

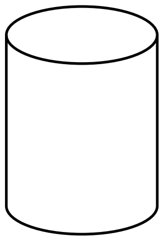
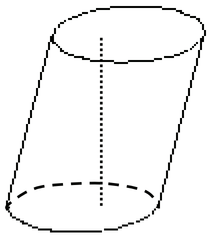
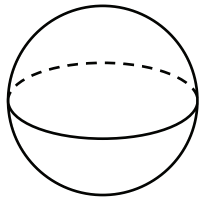
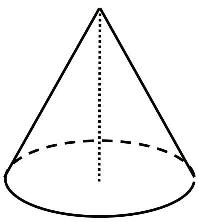
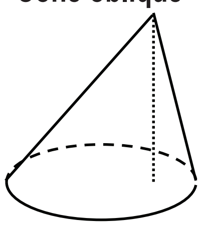
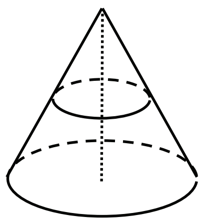
Triangle  $P = C_1 + C_2 + C_3$ $A = \frac{B \,.\, h}{2}$	**Carré**  $P = 4 \,.\, C$ $A = C \,.\, C = C^2$	**Rectangle**  $P = (L + l) \,.\, 2$ $A = L \,.\, l$
Parallélogramme  $P = (L_1 + L_2) \,.\, 2$ $A = B \,.\, h$	**Losange**  $P = 4 \,.\, C$ $A = \frac{D.d}{2}$	**Trapèze**  $P = B + b + C_1 + C_2$ $A = \frac{(B + b).h}{2}$
Polygones réguliers  $P = C \,.\, N^{bre}$ de côtés $A = \frac{\text{Périmètre . Apothème}}{2}$	**Polygones irréguliers**  $P = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n$ $A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-2}$	**Cercle**  $P = 2 \,.\, \pi \,.\, r =$ longueur de la circonférence $A = \pi \,.\, r^2$
Secteur  $A = \frac{\pi . r^2 . \alpha°}{360°}$	**Ellipse**  $A = \pi \,.\, x \,.\, y$	

P = Périmètre	B = Base (Gde)
A = Aire	b = petite base
V = Volume	h = Hauteur
C = Côté	D = Gde Diagonale
L = Longueur	d = petite diagonale
l = largeur	$\alpha°$ = ampl. du sect.
r = rayon	a, x, y = voir dessins
R = rayon	

2. VOLUMES DE CORPS A FACES PLANES

Cube	Parallélépipède rectangle	Prisme droit
 $A_{totale} = 6 \cdot a^2$ $V = a^3$	 $A = 2 \cdot (L.l + L.h + l.h)$ $V = L \cdot l \cdot h$	 $V = A_{base} \cdot h$
Prisme oblique	**Tétraèdre régulier**	**Pyramide quelconque**
 $V = A_{base} \cdot h$	 $V = A_{base} \cdot \frac{h}{3} = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}$	 $V = A_{base} \cdot \frac{h}{3}$

3. VOLUMES DE CORPS RONDS

Cylindre droit	Cylindre oblique	Sphère
 $A_{totale} = 2.\pi.r.h + 2.\pi.r^2$ $V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$	 $V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$	 $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
Cône droit	**Cône oblique**	**Tronc de cône**
 $A_{totale} = \pi \cdot r \cdot a + \pi \cdot r^2$ $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$	 $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$	 $A_{totale} = \pi.a.(R + r) + \pi.(R^2 + r^2)$ $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R.r)$