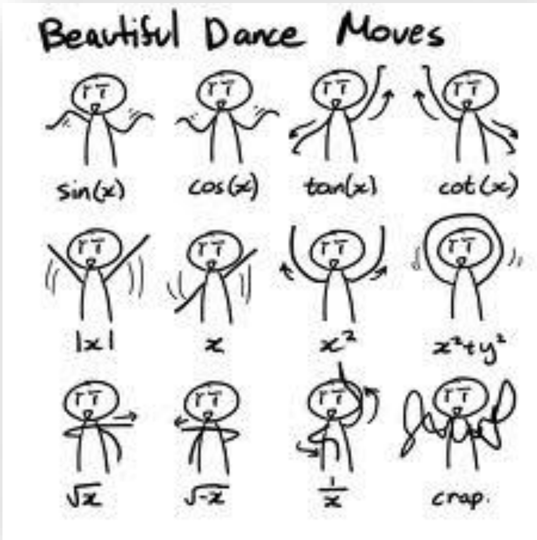
Collège Saint-Barthélemy
Y. Michiels

Mathématique – Troisième année

UAA3 - Approche graphique d'une fonction

OBJECTIFS – UAA3 : Approche graphique d'une fonction

Connaitre



- Distinguer graphiquement fonction et relation.
- Se servir d'un graphique pour répondre à des questions concernant certaines valeurs de la variable ou de ses images.
- Donner une interprétation graphique de m et p dans l'équation y = mx+p.
- Associer des fonctions du type f(x) = mx et f(x) = mx + p à leur graphique ou tableau de nombres, reconnaître qu'une fonction exprime une proportionnalité à partir de son tableau, de son graphique, de son expression analytique.
- Identifier les paramètres ***m*** et ***p*** dans un tableau de nombres, sur un graphique ou à partir de son expression analytique.
- Tracer le graphique d'une fonction et d'une relation non fonctionnelle.

Appliquer

- A partir de graphiques de fonctions :
  - Rechercher le domaine, l'ensemble-image et les points d'intersection du graphique de cette fonction avec les axes.
  - Rechercher les points d'intersection des graphiques de deux fonctions.
  - Ecrire les parties de R où une fonction est positive, négative ou nulle et construire le tableau de signe correspondant.
  - Ecrire les parties de R où une fonction est croissante, décroissante ou constante.
  - Résoudre des équations et inéquations de type : f(x) = g(x), f(x) < g(x), f(x) > g(x).
- Déterminer si un point dont on connaît les coordonnées appartient ou non au graphique d'une fonction dont on connaît l'expression analytique.
- Tracer le graphique d'une fonction du premier degré et d'une fonction constante.
- Déterminer les paramètres ***m*** et ***p*** d'une fonction répondant à certaines conditions.
- A partir d'un des aspects (tableau, graphique, formule) d'une fonction du premier degré, déterminer les deux autres.

Transférer

- Tracer le graphique d'une fonction qui répond aux conditions données.
- Traduire une situation contextualisée par une fonction, une équation ou inéquation du premier degré.
- Résoudre un problème nécessitant la recherche d'éléments caractéristiques du graphique d'une fonction.

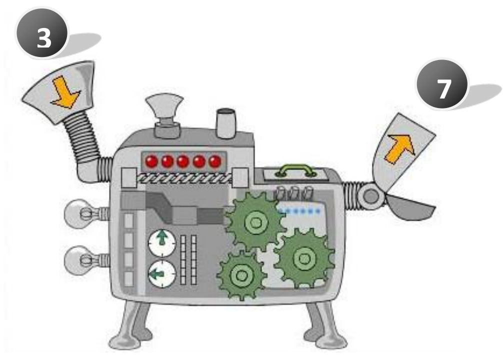
EXPLORATION : TABLEAUX – GRAPHIQUES ET FONCTIONS

1. *Des opérations qui s'enchainent…*

Ce tableau utilise l'opérateur : **+ 4**

Complète-le.

Entrée	Sortie
3	7
5	
	10
	23



+ 4

Formule : $y = x + 4$

Détermine chaque fois l'opérateur qui convient au tableau :

Entrée	Sortie
6	3
10	5
18	9
2	1

……

Formule : …………………

Entrée	Sortie
3	5
9	11
50	52
1	3

……

Formule : …………………

Vidéo d'introduction

Voici quatre opérateurs. Pour chaque tableau, il faut en enchainer deux. Fais le bon choix :

. 2 **. 3** **+ 1** **- 1**

Entrée	Sortie
2	3
8	15
20	39
5	9

....

Formule : ....

Entrée	Sortie
2	7
8	25
20	61
5	16

....

Formule : ....

Entrée	Sortie
2	5
8	17
20	41
5	11

....

Formule : ....

Entrée	Sortie
2	2
8	8
20	20
5	5

....

Formule : ....

Entrée	Sortie
2	2
8	14
20	38
5	8

....

Formule : ....

Entrée	Sortie
2	6
8	18
20	42
5	12

....

Formule : ....

Entrée	Sortie
2	5
8	23
20	59
5	14

....

Formule : ....

Entrée	Sortie
2	12
8	48
20	120
5	30

....

Formule : ....

Entrée	Sortie
2	9
8	27
20	63
5	18

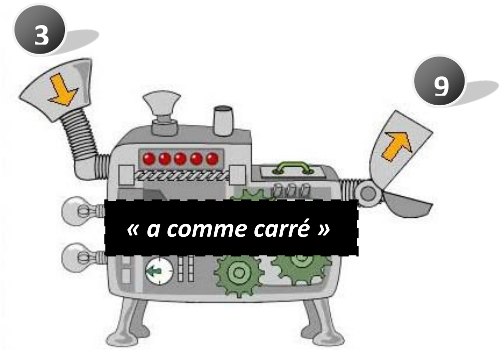
....

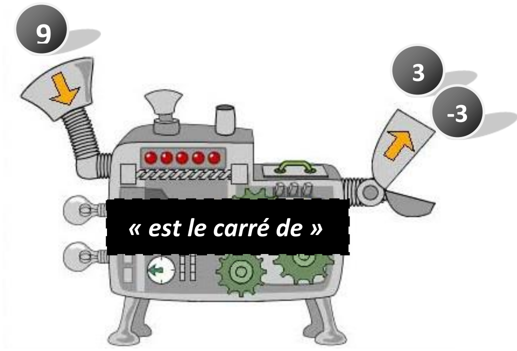
Formule : ....

2. *Une « machine qui transforme les nombres »*

[Vidéo : notion de fonctions et vocabulaire]() (du début → 7’13 »)

Voici deux machines qui transforment les nombres suivant deux règles différentes :



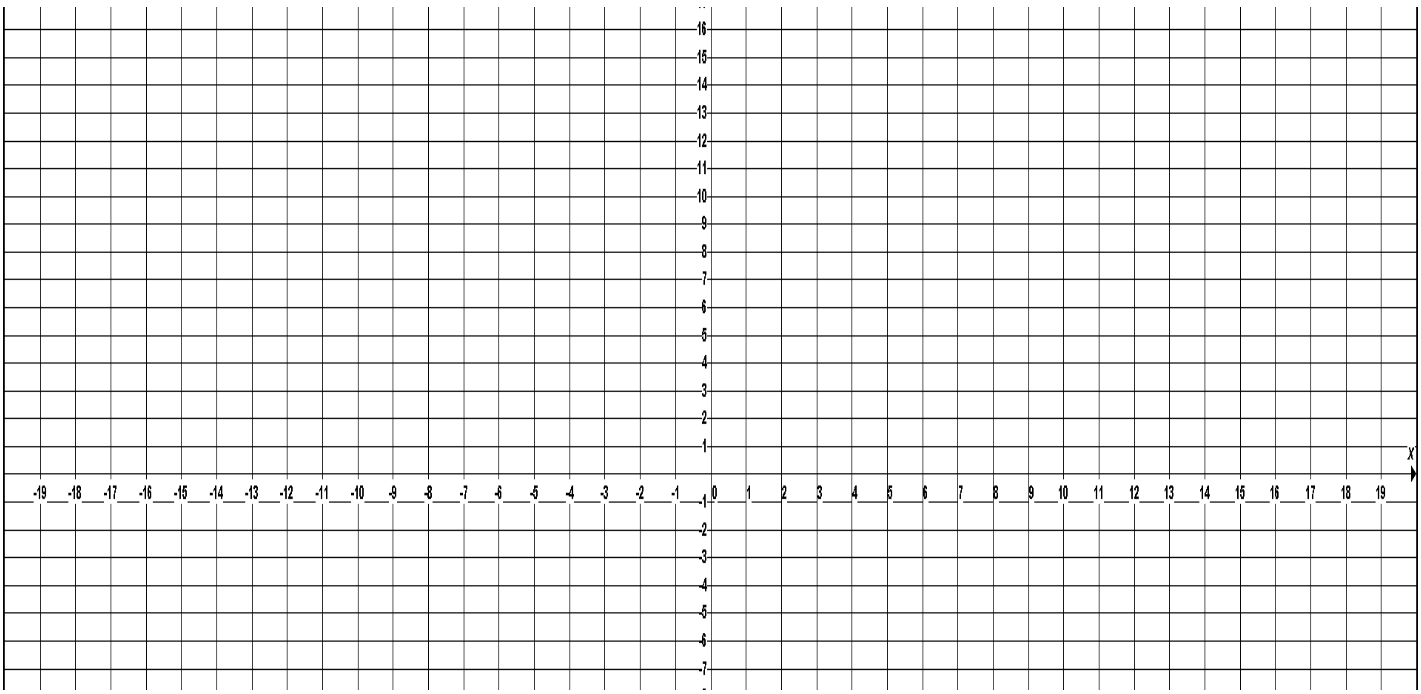


Pour chacune d’elle, complète les tableaux de nombres ci-dessous :

« Entrée » *Antécédents (x)*	« Sortie » *Images (y)*
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

« Entrée » *Antécédents (x)*	« Sortie » *Images (y)*
-4	
-1	
0	
1	
4	
9	
16	
25	
36	

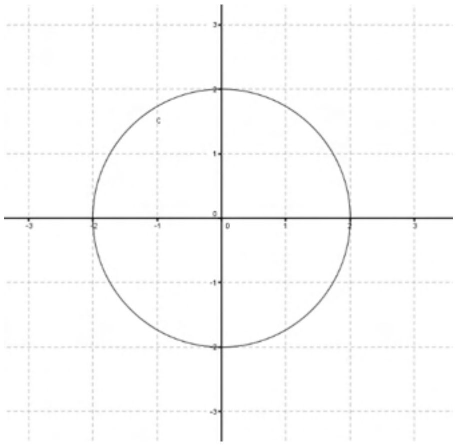
Place les couples de points ainsi trouvés dans le repère cartésien ci-dessous

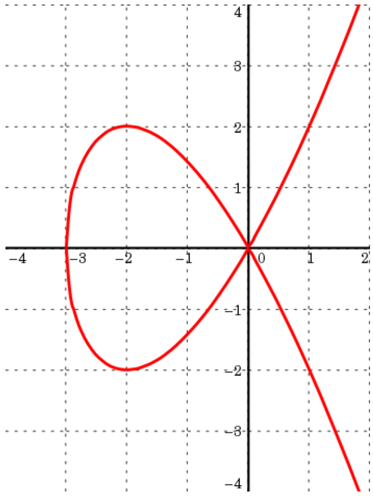


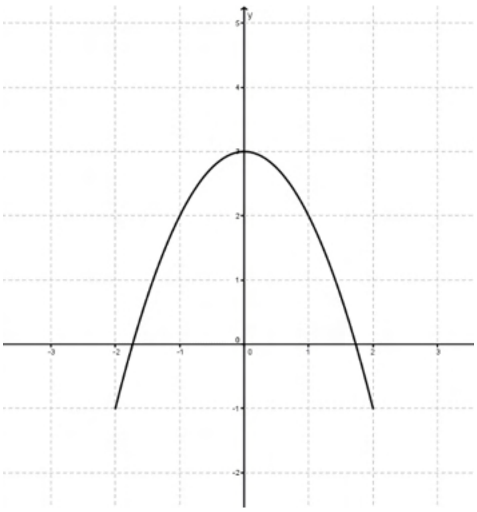
3. *Fonction ou simple relation ?*

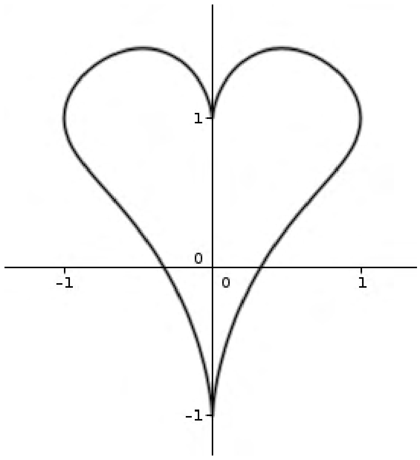
[Vidéo : fonction ou relation non fonctionnelle]

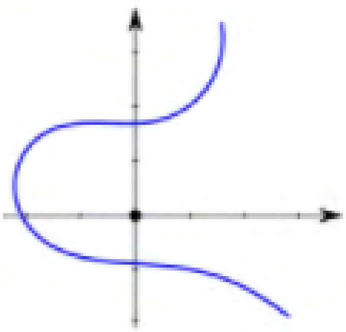
Indique sur chaque graphique « Fct » s'il représente une fonction et « Rel » s'il représente une relation qui n'est pas une fonction. Justifie.

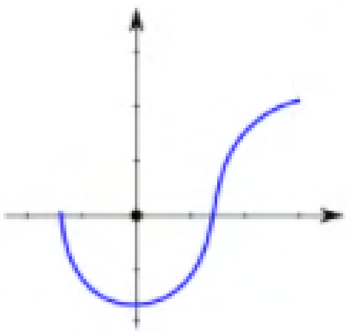


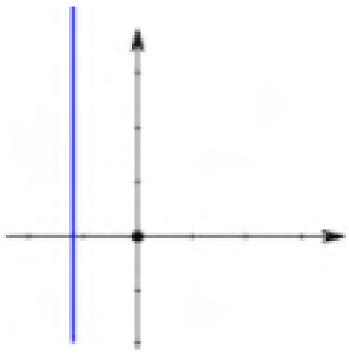










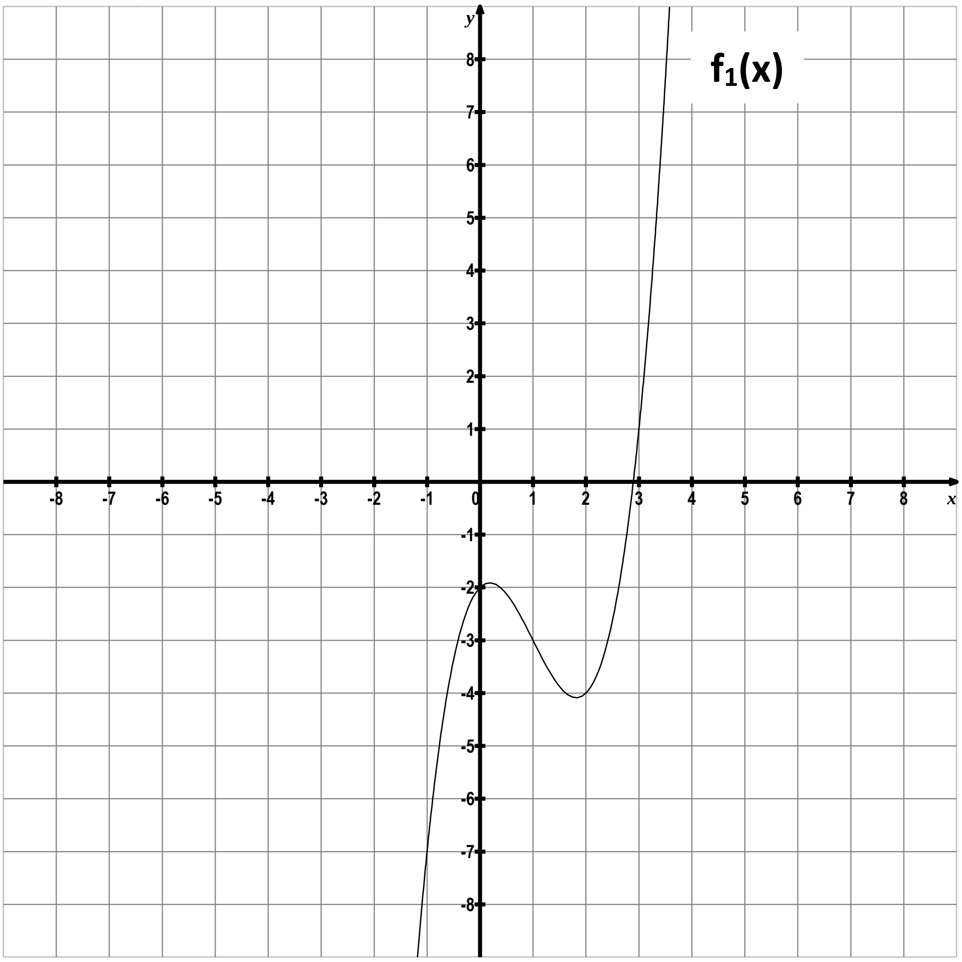


Théorie

Lire et compléter pages 24 et 25 puis 28 et 29

Vidéo : image et antécédent (10'58 » → 17'20 »)

4. Image de…



a) A partir du graphique de f(x) ci-dessus, complète :

a] $f_1(3)$ = …… b] f_1 (0) = …… c] f_1 (-1) = …… d] f_1 (1) = ……

« ***f(3) =*** » se traduit en L.L. par : « ***Quelle est l'image de 3 par la fonction f(x) ?*** »

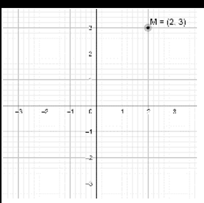
b) A partir de la fonction dont voici la forme algébrique : $\mathbf{f_2(x) = 2x^2 - 5x + 3}$, calcule :

a] $f_2(3)$ = …… b] $f_2(0)$ = ……

c] $f_2(2)$ = …… d] $f_2(-3)$ = ……

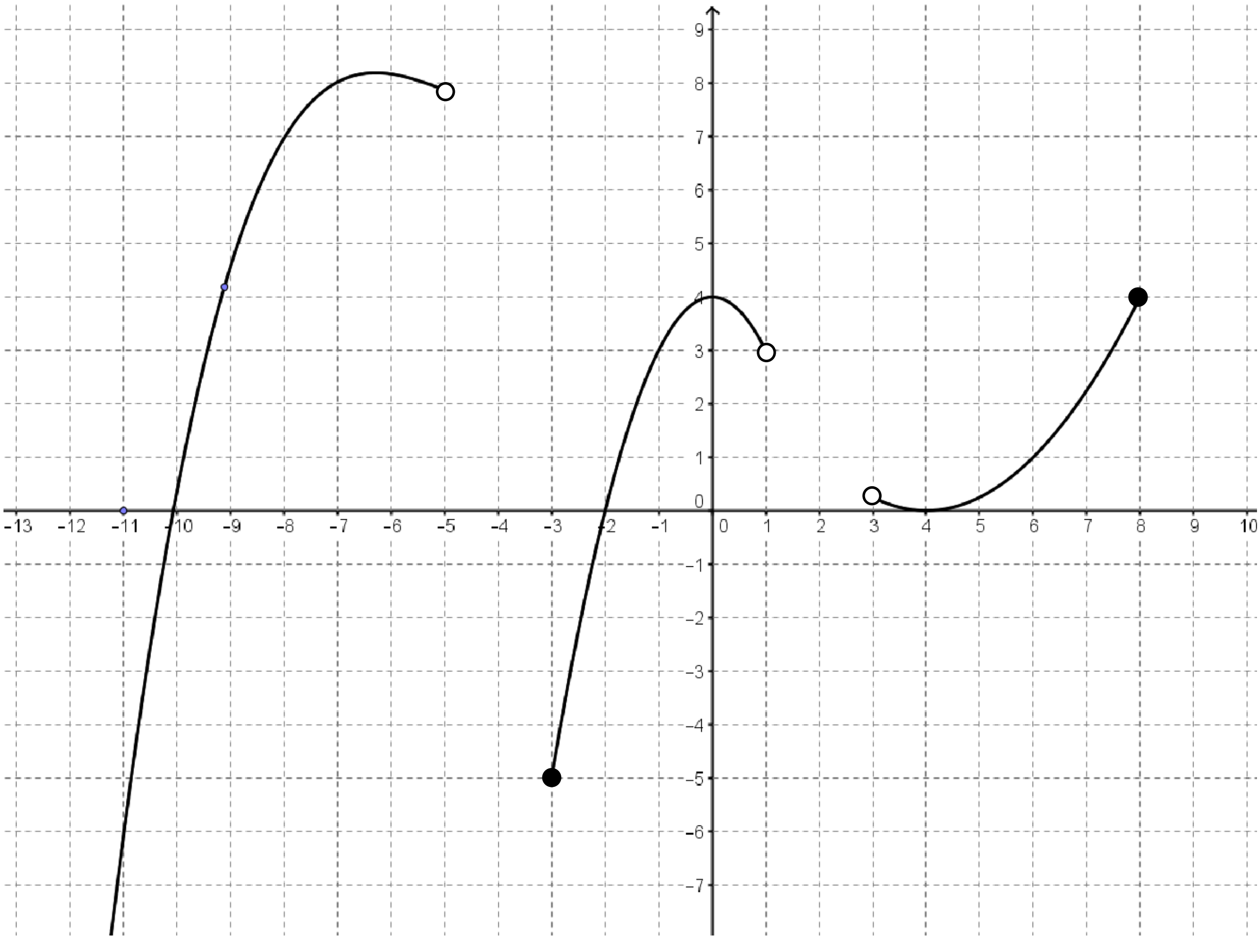
e] $f_2(-1)$ = …… f] $f_2(1)$ = ……

g] $f_2(-2)$ = …… h] $f_2(\sqrt{2})$ = ……

Langage symbolique formel	Langage littéraire	Tableau de valeurs	Langage graphique
f(2) = 3	L'image de 2 par la fonction **f** est 3 ou 2 a pour image 3 par la fonction **f**.	*x* : 2 ; *f(x)* : 3	 Le point M de coordonnées (2 ; 3) appartient au graphe de la fonction f(x)

Théorie
Lire et compléter pages 26 et 27

5. *Domaine de définition d'une fonction*



Pour la fonction f(x) représentée ci-dessus :

- Quelle est l'image de -7 ?
- Quelle est l'image de -2 ?
- Quelle est l'image de 6 ?
- Quelle est l'image de 0 ?
- Quelle est l'image de -4 ?
- Quelle est l'image de 9 ?

Cite tous les nombres « x » qui ont une image par f(x) :

Théorie
Lire et compléter pages 30 à 33

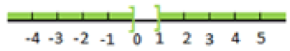
L'ensemble des « x » qui ont une image par une fonction est appelé : domaine de définitions de la fonction. (Aide : https://www.geogebra.org/m/uNBYVFUS)

Convention d'écriture :

Le domaine de définition de la fonction ci-dessus est « la réunion » de trois parties :

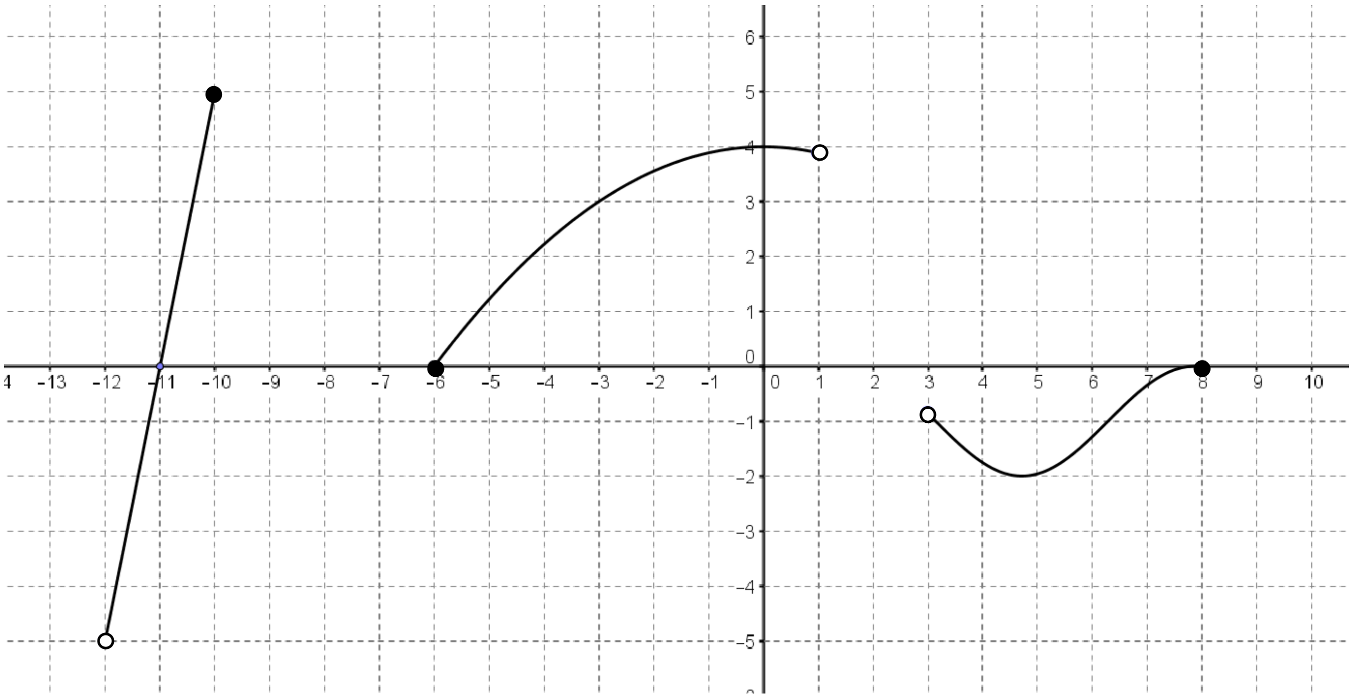
- « ***Tous les « x » négatifs jusque (-5) non compris*** » se note : ***]-∞ ; -5[***
- ***« Tous les « x » compris entre (-3) et 1 mais pas 1 »*** se note : ***[-3 ; 1[***
- ***« Tous les « x » compris entre 3 et 8 mais pas 3 »*** se note : ***]3 ; 8]***

Le domaine de la fonction f(x) est :

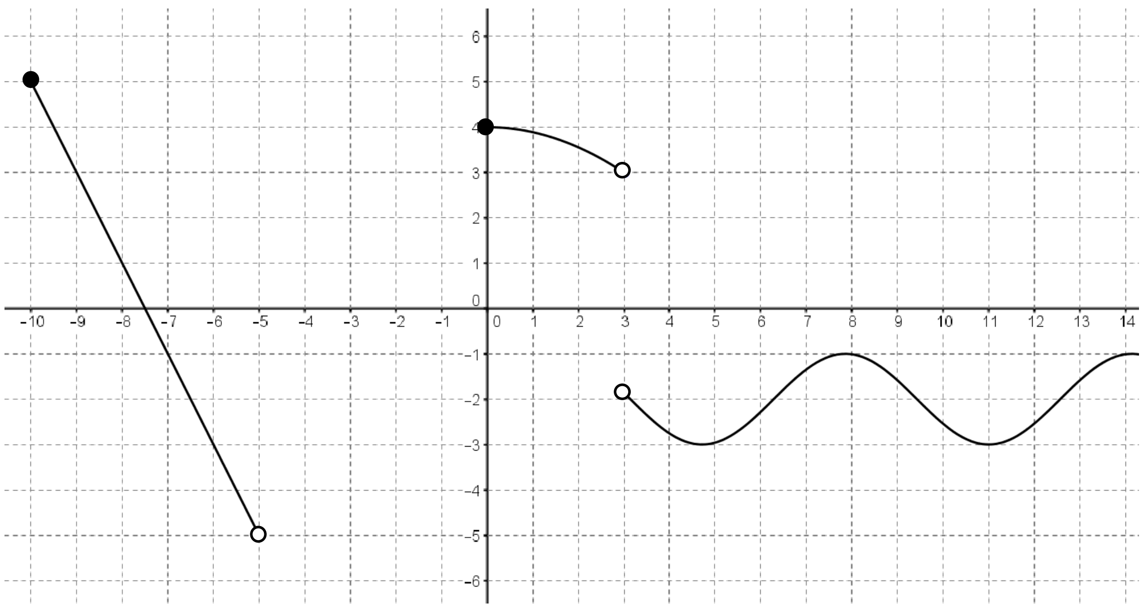
Intervalle	Encadrement	Droite graduée
$x \in]-\infty\,;0]$	$x \leq 0$	
$x \in [-2\,;2[$	$-2 \leq x < 2$	
$x \in]1\,;\,+\infty[$	$x > 1$	
$x \in [-1\,;0] \cup [1\,;3]$	$-1 \leq x \leq 0$ ou $1 \leq x \leq 3$	
$x \in]-\infty\,;0] \cup]1\,;\,+\infty[$	$x \leq 0$ ou $x > 1$	

www.geogebra.org/m/TByZwsCg et https://www.geogebra.org/m/uNBYVFUS

Applications simples :



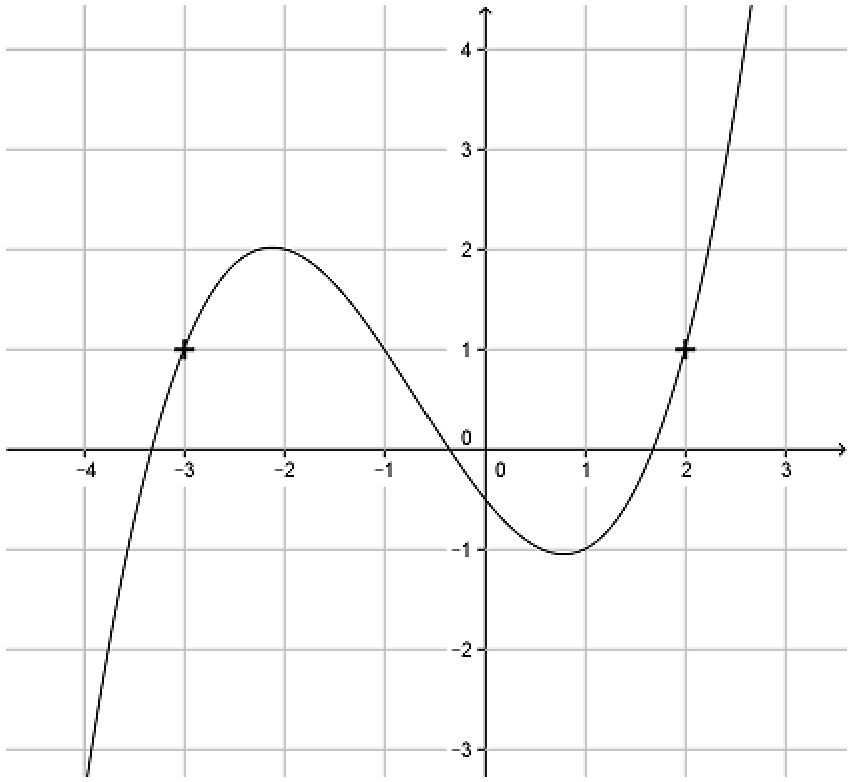
Domf =



Domf =

6. ***Antécédents de…***

a) A partir du graphique suivant, détermine :



- le ou les éventuels antécédent(s) de 1 par la fonction f(x) →
- le ou les éventuels antécédent(s) de -3 par la fonction f(x) →
- le ou les éventuels antécédent(s) de 0 par la fonction f(x) →
- les valeurs de x si f(x) = 4 →
- les valeurs de x si f(x) = 0 →

7. ***Ne pas confondre***

Voici un tableau de valeurs correspondant à une fonction g(x). Complète les égalités suivantes :

x	**y ou g(x)**
-0,5	**0,5**
-0,1	**2**
0	**1**
0,5	**0,5**
1	**2**
2	**8**
8	**128**

g(-0,1) = …

g(…) = 1

g(0,5) = …

g(…) = 8

g(8) = …

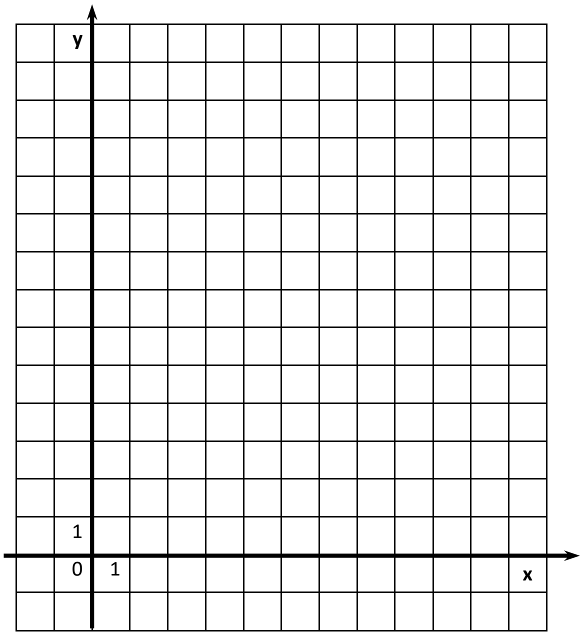
g(…) = 2

8. ***<u>En fonction de…</u>***

Quelles peuvent être les dimensions d'un rectangle dont le périmètre mesure 24 U (unités) ?

a) Si x et y représentent les dimensions possibles du rectangle, note ces valeurs dans le tableau ci-dessous.

x	y	(x ; y)



b) Place tous les couples solutions dans le repère cartésien ci-dessus.

c) Tous ces points sont-ils alignés ?

d) Exprime le procédé de calcul qui permet de trouver ***« y » en <u>fonction</u> de « x »***.

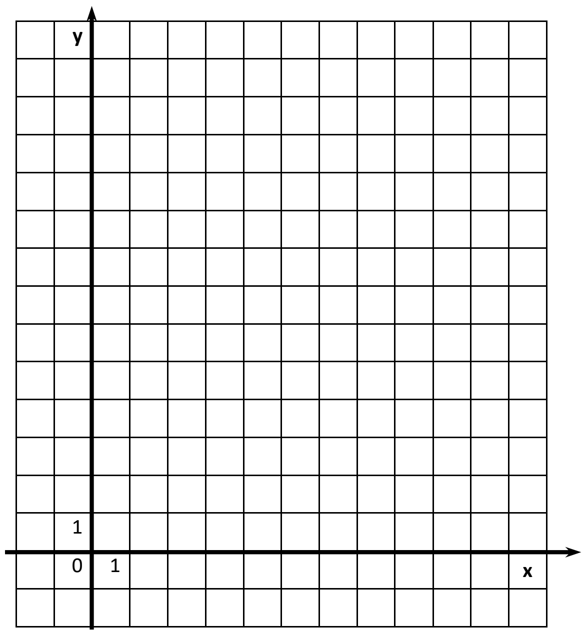
e) Parmi les égalités ci-dessous, quelles sont celles qui expriment la dimension « y » en fonction de la dimension « x ».

$y = 24 - x$ $\qquad$ $y = 12 - x$ $\qquad$ $y = 12 - 2x$ $\qquad$ $y = 24 - 2x$ $\qquad$ $y = \dfrac{24-2x}{2}$

9. *Quelles peuvent être les dimensions d'un rectangle dont l'aire mesure 24 U² (unité au carré) ?*

a) Si x et y représentent les dimensions possibles du rectangle, note ces valeurs dans le tableau ci-dessous.

x	y	(x ; y)



b) Place tous les couples solutions dans le repère cartésien ci-dessus.

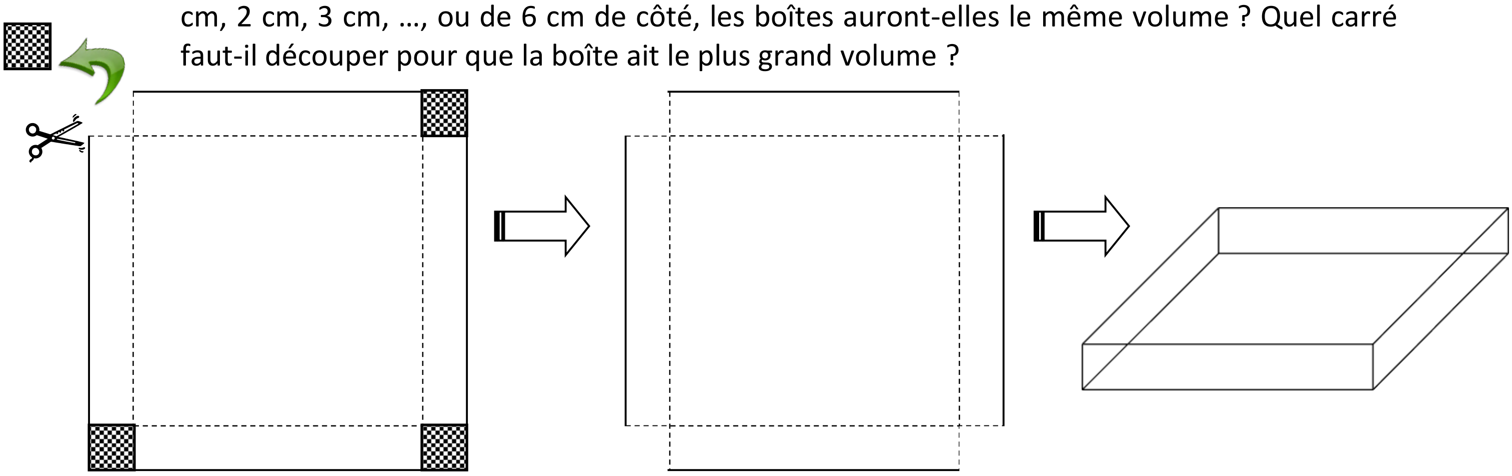
c) Tous ces points sont-ils alignés ?

d) Exprime le procédé de calcul qui permet de trouver ***« y » en <u>fonction</u> de « x »***.

e) Parmi les égalités ci-dessous, quelles sont celles qui expriment la dimension « y » en fonction de la dimension « x ».

$y = 24.x$ $\qquad$ $y = 12.x$ $\qquad$ $y = \dfrac{12}{x}$ $\qquad$ $y = \dfrac{24}{x}$ $\qquad$ $y = \dfrac{\sqrt{24}}{x}$

10. Tu disposes d'un carré de 12 cm de côté. En découpant à chaque coin un même petit carré, tu obtiens le développement d'une boîte sans couvercle. Si tu découpes des petits carrés de 1 cm, 2 cm, 3 cm, …, ou de 6 cm de côté, les boîtes auront-elles le même volume ? Quel carré faut-il découper pour que la boîte ait le plus grand volume ?



a) Pour t'aider, complète le tableau ci-dessous.

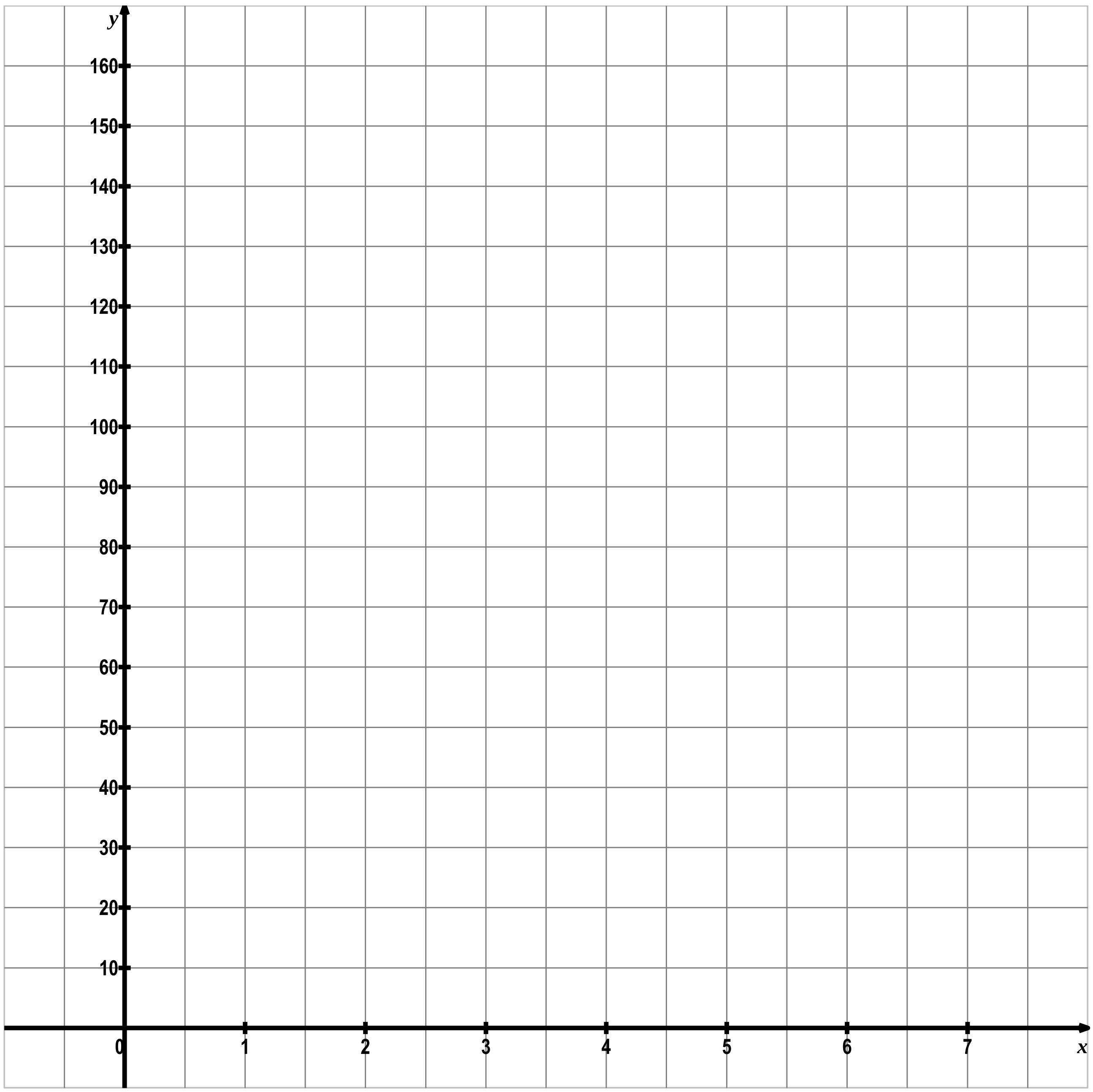
b) Place tous les couples solutions dans le repère cartésien ci-après.

c) Tous ces points sont-ils alignés ?

d) Exprime le procédé de calcul qui permet de trouver ***« y » en <u>fonction</u> de « x »***.

Longueur du côté du carré découpé (x)	**Longueur du côté du carré servant de base à la boîte**	**Aire de la base**	**Volume de la boîte (y)**
1			
2			
3			
4			
5			
6			
…			
x			**y =**

Aide : https://www.geogebra.org/m/agSDv3bW



e) Par lecture sur le graphique ci-dessus :

Pour quelle(s) valeur(s) de « x » le volume est-il plus grand que 90 cm³ ?

Pour quelle(s) valeur(s) de « x » le volume est-il égal à 80 cm³ ?

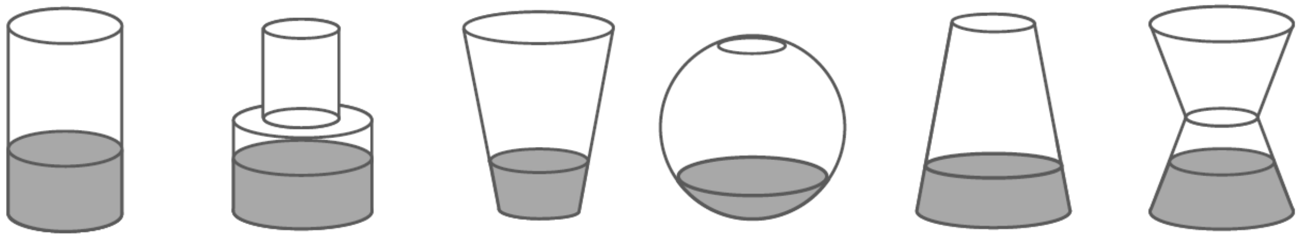
Pour quelle(s) valeur(s) de « x » a-t-on f(x) = 60 cm³ ?

Pour quelle(s) valeur(s) de « x » a-t-on f(x) ≤ 50 cm³ ?

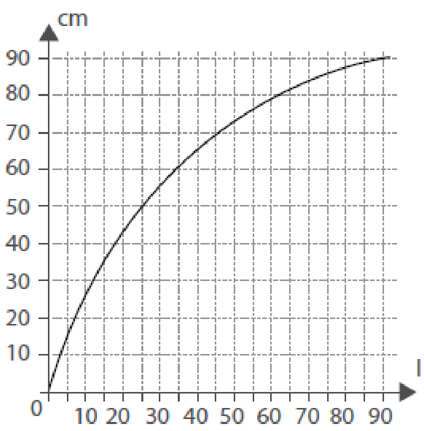
Collège Saint-Barthélemy
Y. Michiels
Mathématique – Troisième année

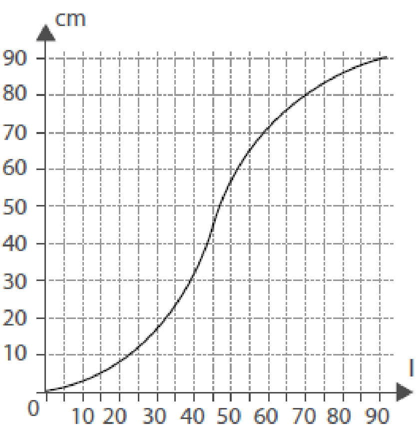
11. ***Courbes et volumes***[1]

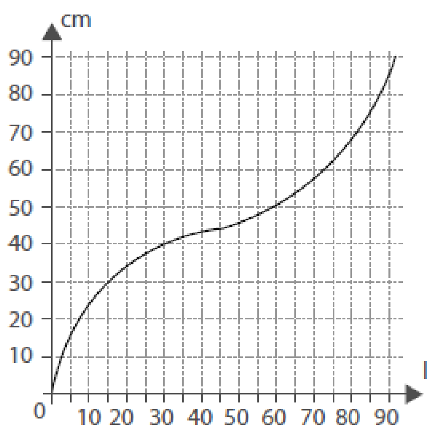
Ces 6 récipients ont même hauteur (90 cm) et même volume (90l). Le graphique indique le niveau de remplissage des récipients en fonction du temps. https://www.geogebra.org/m/vjSqFCwG#material/DnehyekS

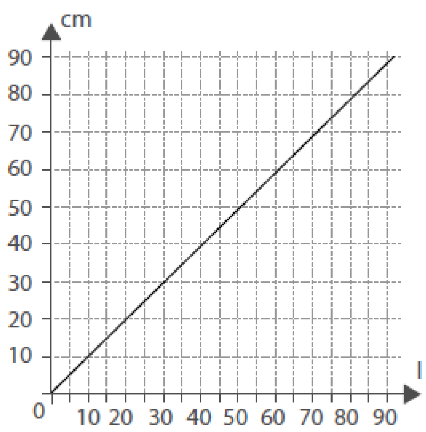


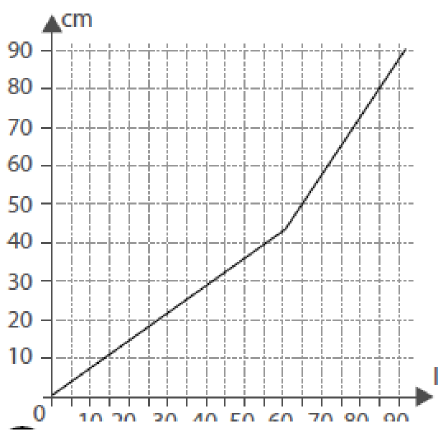
Quelle est la courbe de remplissage de chaque récipient ?

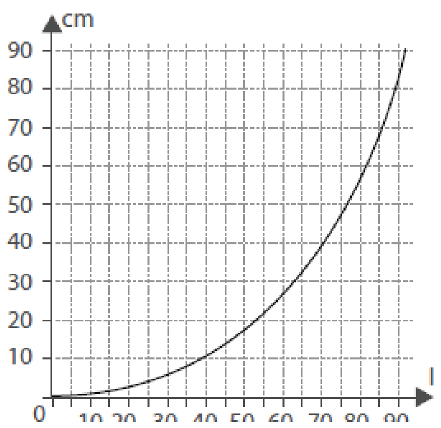






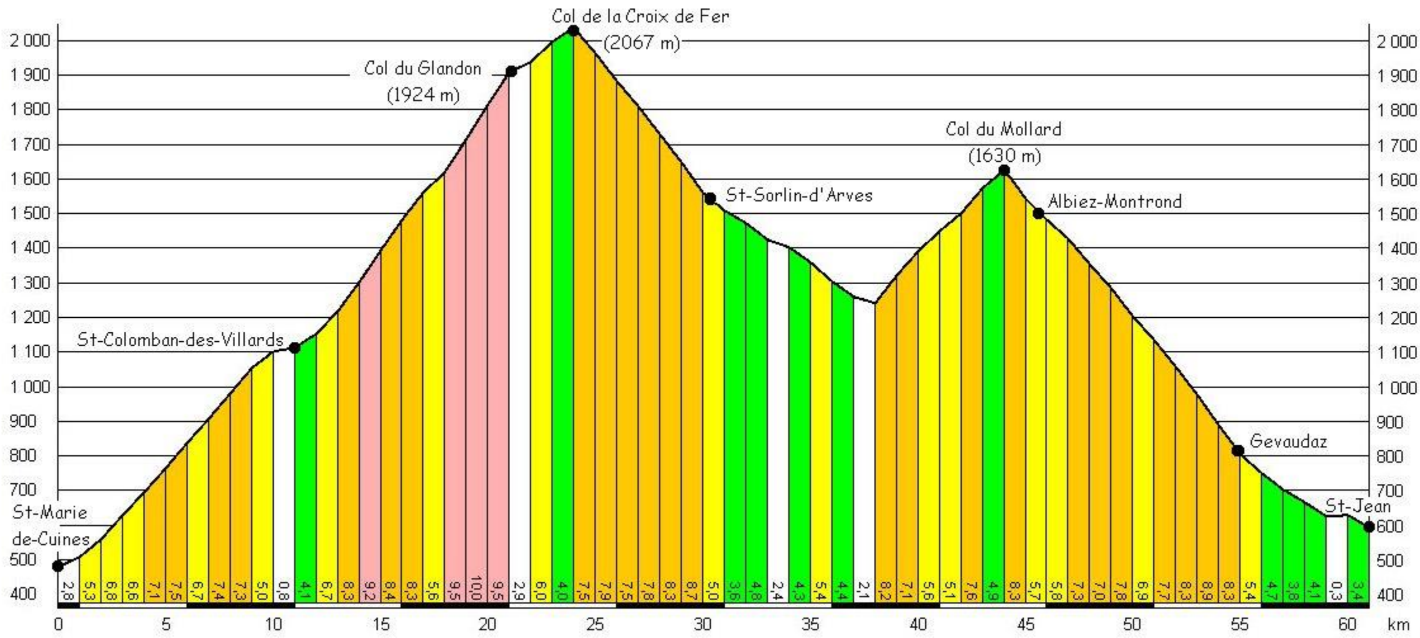






Théorie
Lire et compléter pages 38 et 39

12. Croissance-décroissance d'une fonction



a] Dans quels intervalles kilométriques la route monte-t-elle ?

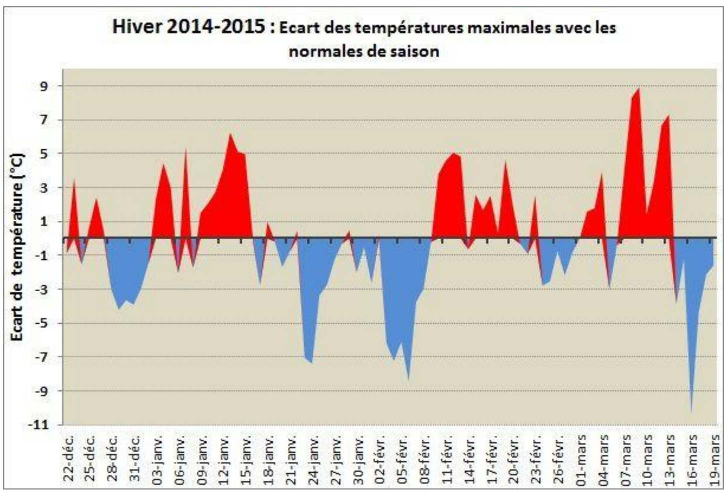
b] Dans quels intervalles kilométriques la route descend-t-elle ?

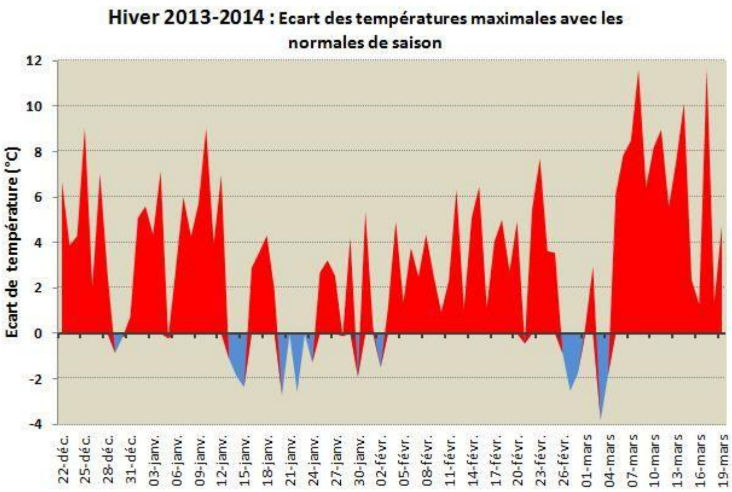
c] Dresse un ***tableau de variation*** qui reprend ces informations :

Km	
Altitude	

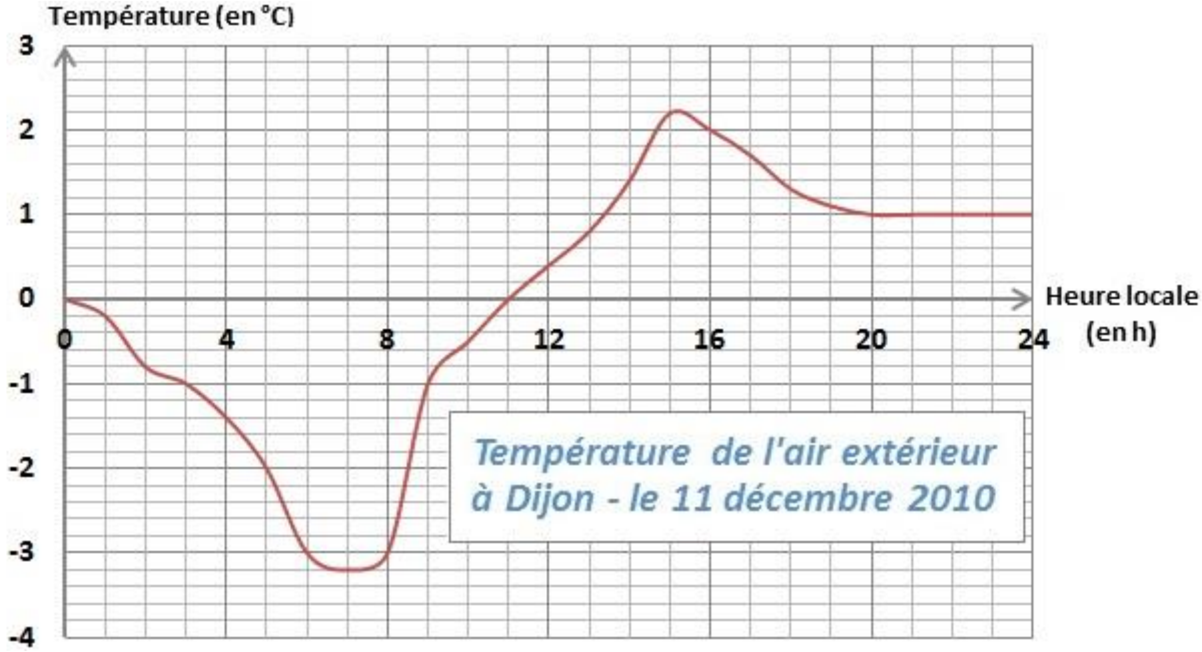
Aide : https://www.geogebra.org/m/cMMvgGqm

13. Signe d'une fonction





Que représentent ces graphiques ? Explique.
https://www.geogebra.org/m/Jv3MszpZ

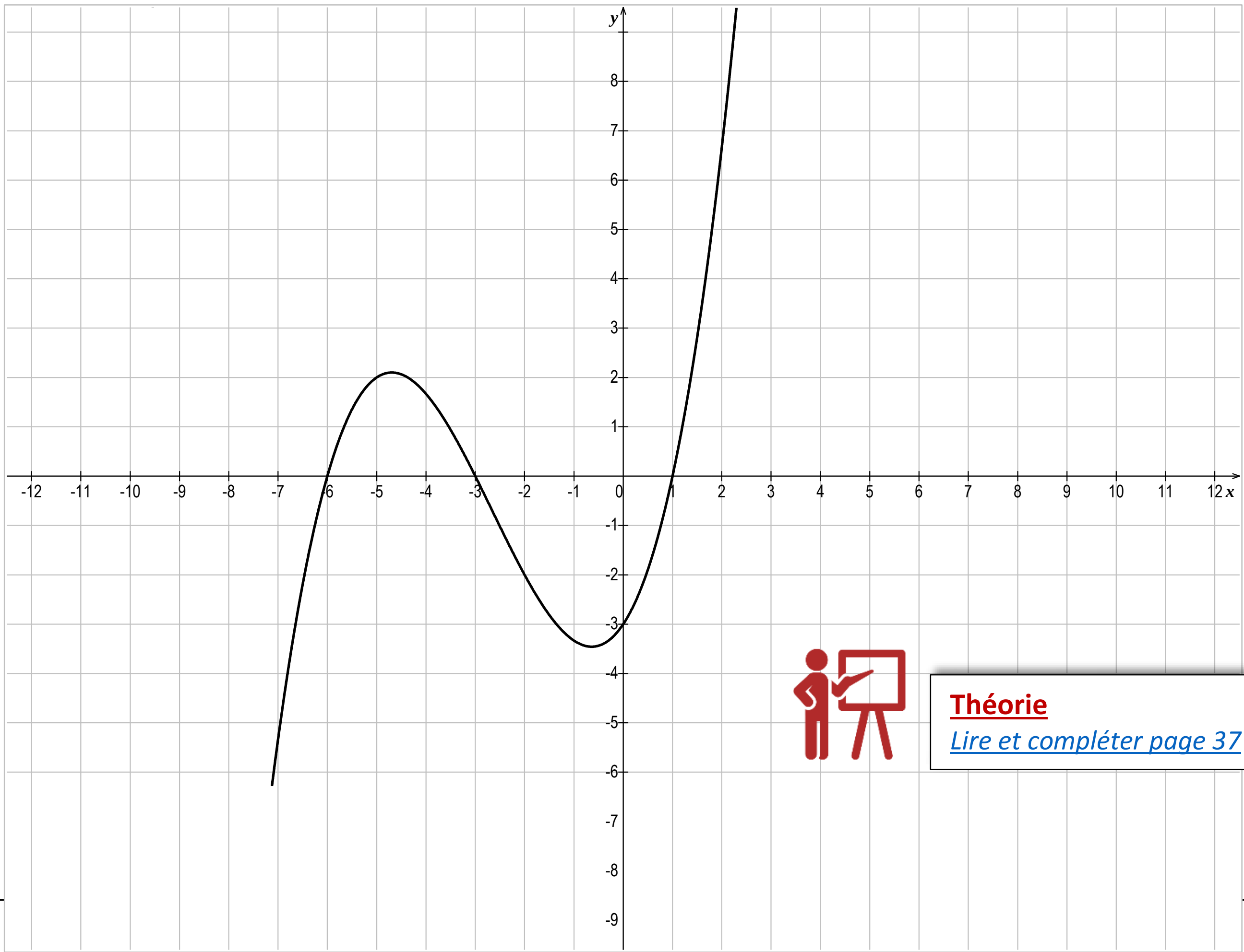


a] Dans quel intervalle de temps la température a-t-elle été positive ?

b] Dans quel intervalle de temps la température a-t-elle été négative ?

c] Dresse un ***<u>tableau de signe</u>*** qui reprend ces informations :

Heure de la journée	
Température	



<u>Théorie</u>

<u>Lire et compléter page 37</u>

À partir du tableau de signes de la fonction $f(x)$, réponds aux questions suivantes[1] :

x		-2		1		5	
f(x)	–	0	+	0	–	0	–

a] Que vaut l'image de 1 ?

b] Quel est le signe de l'image de 10 ?

c] Quel est le signe de l'ordonnée à l'origine ?

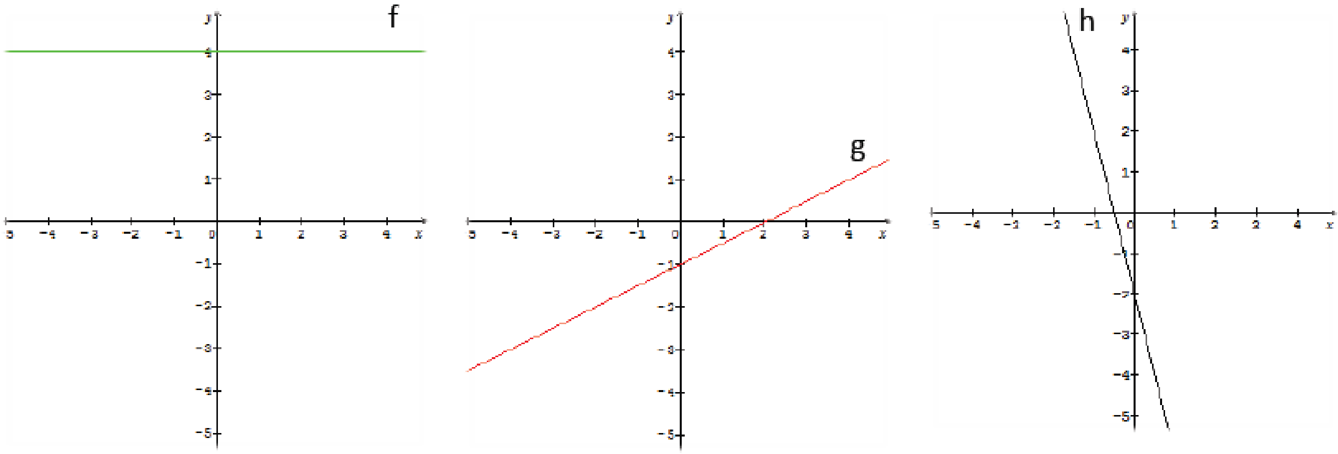
d] Énonce une valeur de la variable x dont l'image est strictement négative

e] En quelles valeurs cette fonction coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

f] -1, est-il solution de l'inéquation $(x)\leq 0$?

g] Pour quelles valeurs de x la fonction est-elle positive ?

Associe chaque graphique des fonctions f(x), g(x) et h(x) au TDS qui lui correspond :



x		3	
sg de ...	+	0	+

x		2	
sg de ...	-	0	+

x			
sg de ...	+	+	+

x		-0,5	
sg de ...	+	0	-

x		-0,5	
sg de ...	-	0	+

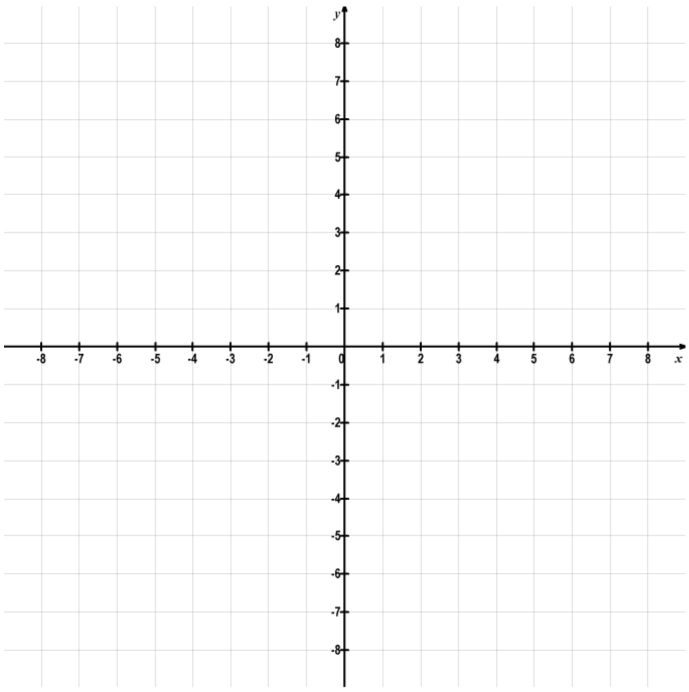
x		-2	
sg de ...	+	0	-

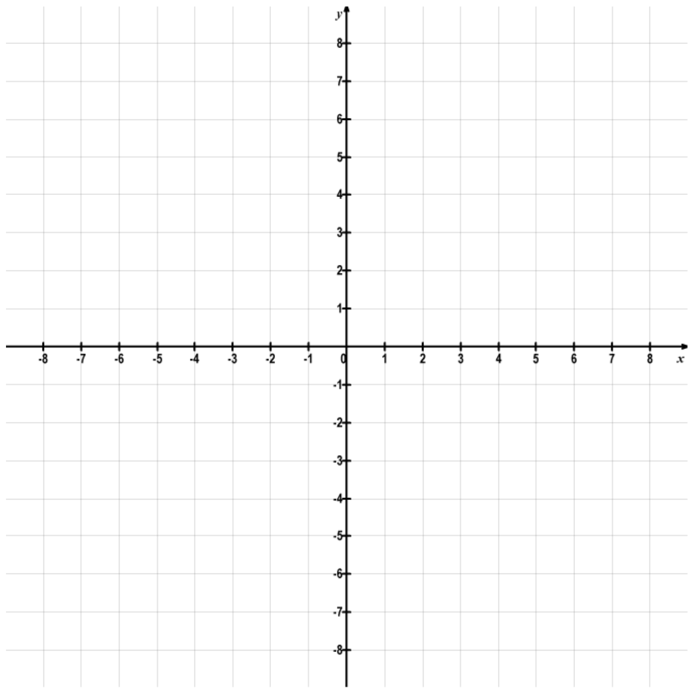
[1] Exercices tirés du document : Apprentissage de l'algèbre au D2 – D2018/7362/3/01 – FESEC : Enseignement Catholique

Trace le graphique d'une fonction dont voici le tableau de signes :

x		-3		0		4	
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

x		-4		-2		1		3	
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$





Écris l'expression analytique d'une fonction qui admet ce TDS

x		1	
$f(x)$	$+$	0	$-$

x		0	
$f(x)$	$-$	0	$+$

x		-2	
$f(x)$	$+$	0	$+$

14. Voici les expressions analytiques de fonctions :

1] $f_1(x) = y = x^3 - 2x^2$	2] $f_2(x) = y = 3x$	3] $f_3(x) = y = 2x + 1$	4] $f_4(x) = y = x^2 + 1$
5] $f_5(x) = y = -2x$	6] $f_6(x) = y = -2$	7] $f_7(x) = y = x^2 + 4x + 4$	8] $f_8(x) = y = -2x - 3$
9] $f_9(x) = y = \dfrac{1}{x}$	10] $f_{10}(x) = y = -x^2 + 3$	11] $f_{11}(x) = y = x^2 - 5x + 6$	12] $f_{12}(x) = y = \sqrt{x}$

a) Pour chaque fonction, complète le tableau ci-dessous puis associe chacune d'entre-elles à son graphique (pages suivantes). Pour les fonctions du premier degré, réalise chaque graphique sur le repère page 18 :

x	***$y = x^3 - 2x^2$***	***(x ; y)***
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

x	***$y = 3x$***	***(x ; y)***
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

x	***$y = 2x + 1$***	***(x ; y)***
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

x	***$y = x^2 + 1$***	***(x ; y)***
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

x	***$y = -2x$***	***(x ; y)***
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

x	***$y = -2$***	***(x ; y)***
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

x	***$y = x^2 + 4x + 4$***	***(x ; y)***
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

x	***$y = -2x - 3$***	***(x ; y)***
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

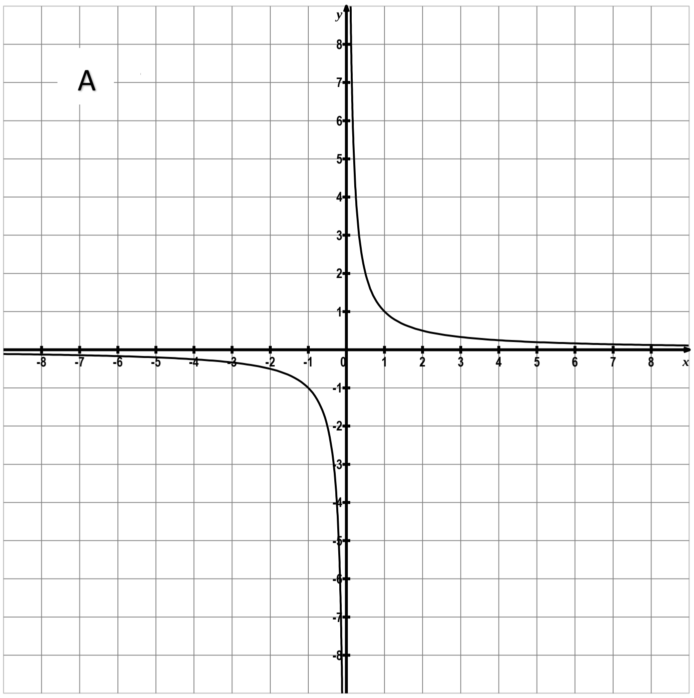
x	***$y = \dfrac{1}{x}$***	***(x ; y)***
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

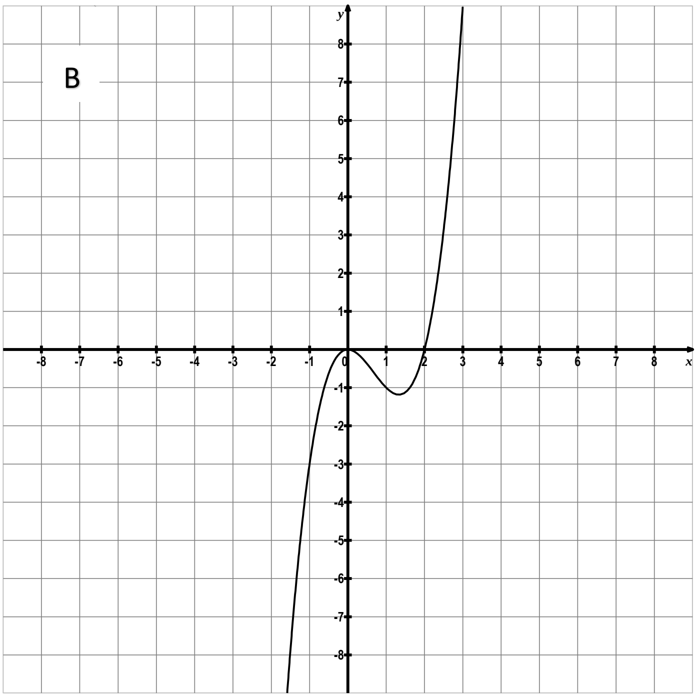
x	***$y = -x^2 + 3$***	***(x ; y)***
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

x	***$y = x^2 - 5x + 6$***	***(x ; y)***
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

x	***$y = \sqrt{x}$***	***(x ; y)***
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

b) Dresse les tableaux de signes et de variations des fonctions **B et E**





Calcul des Zéros de la fonction (B) :

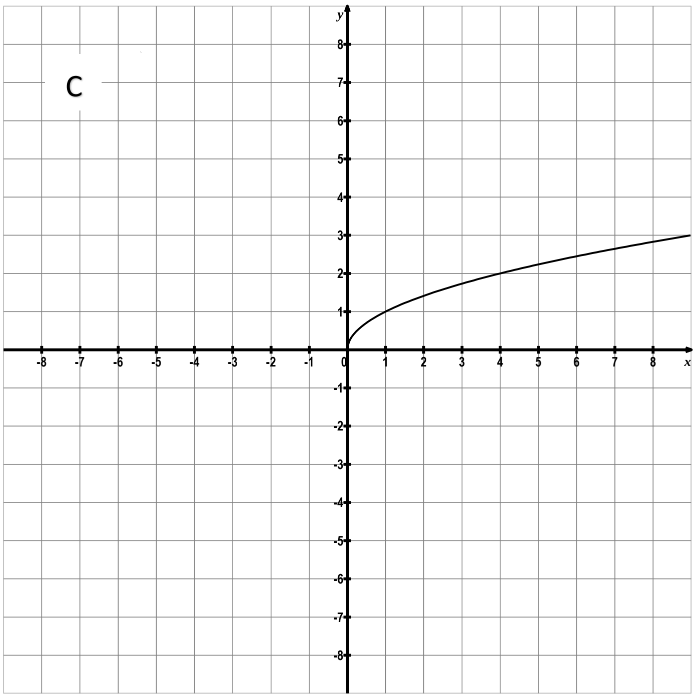
Tableau de signes (B)

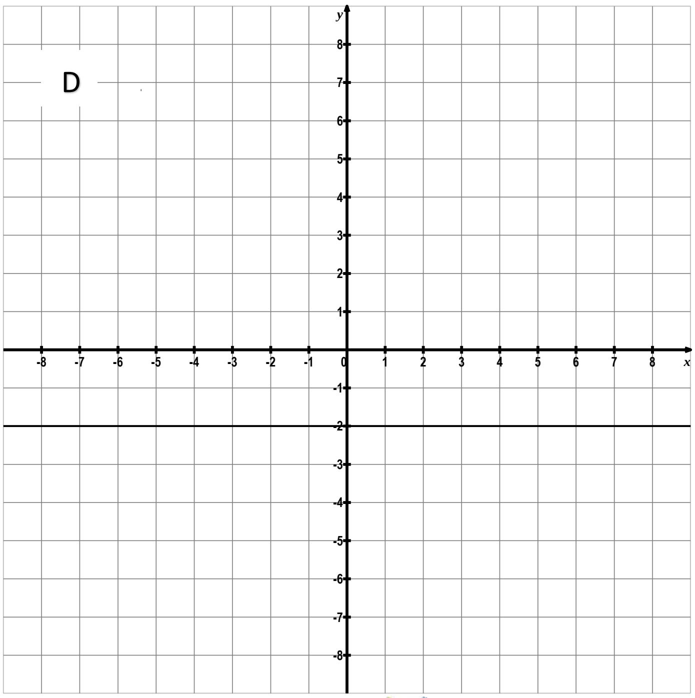
x	
f…(x)	

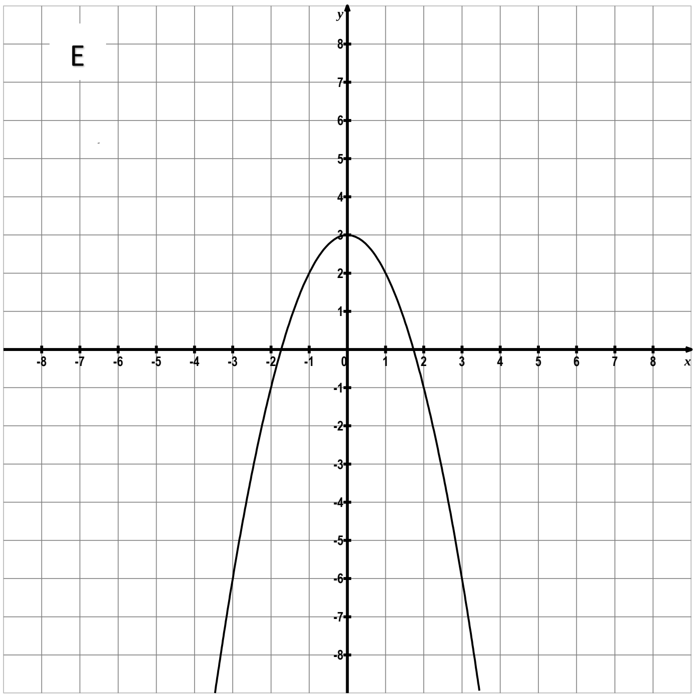
Calcul de l'ordonnée à l'origine (B) :

Tableau de variations (B)

x	
f…(x)	







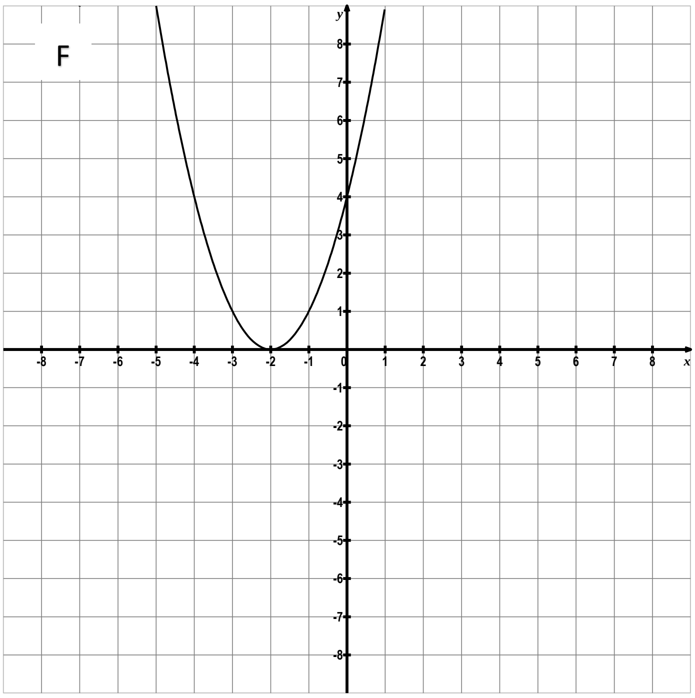


Tableau de signes (E)

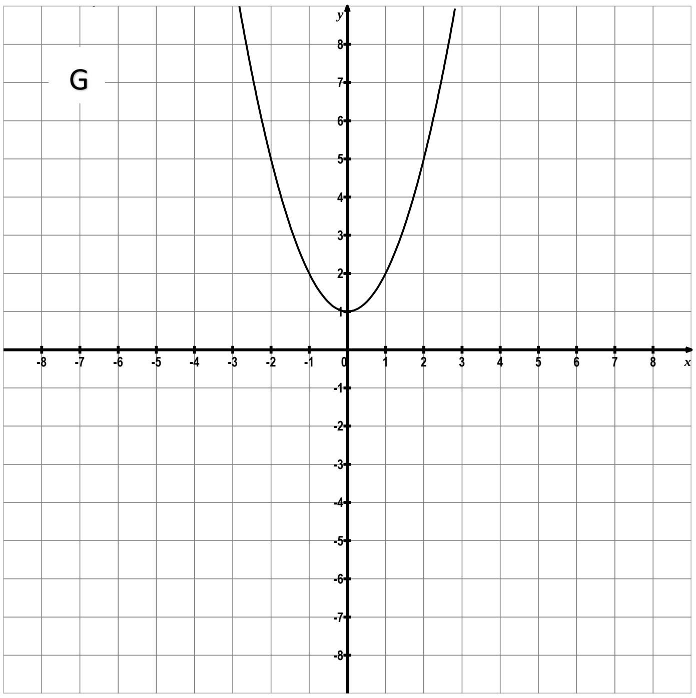
x	
f…(x)	

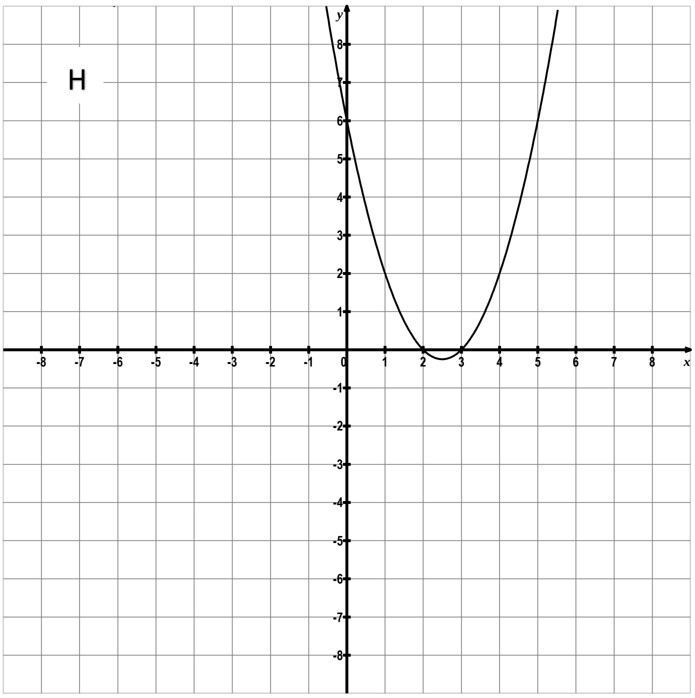
Calcul des Zéros de la fonction (E) :

Tableau de variations (E)

x	
f…(x)	

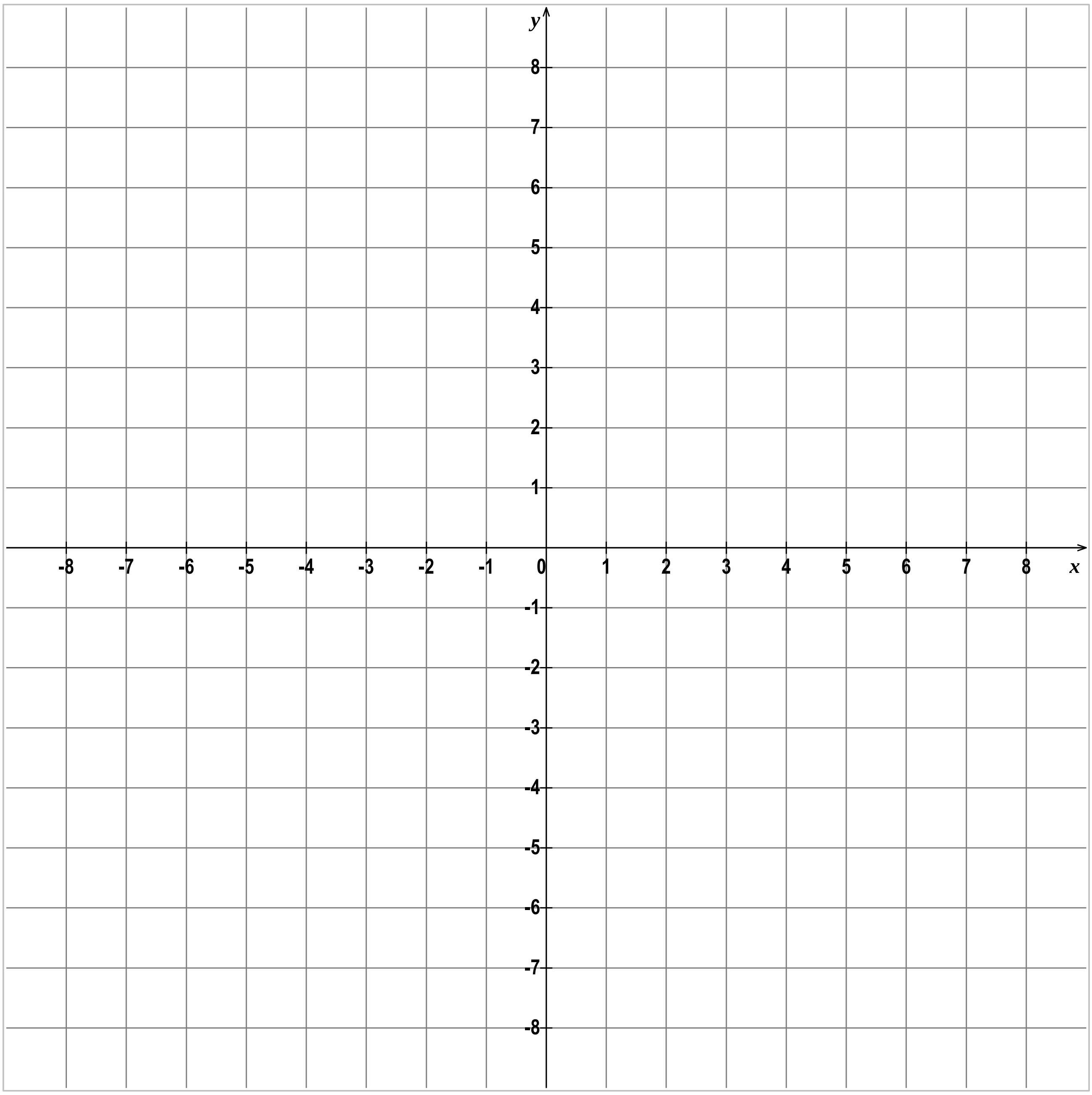
Calcul de l'ordonnée à l'origine (E) :





Repère cartésien sur lequel tu dois représenter les fonctions du premier degré

https://www.geogebra.org/m/vjSqFCwG#material/Nanr6eFy

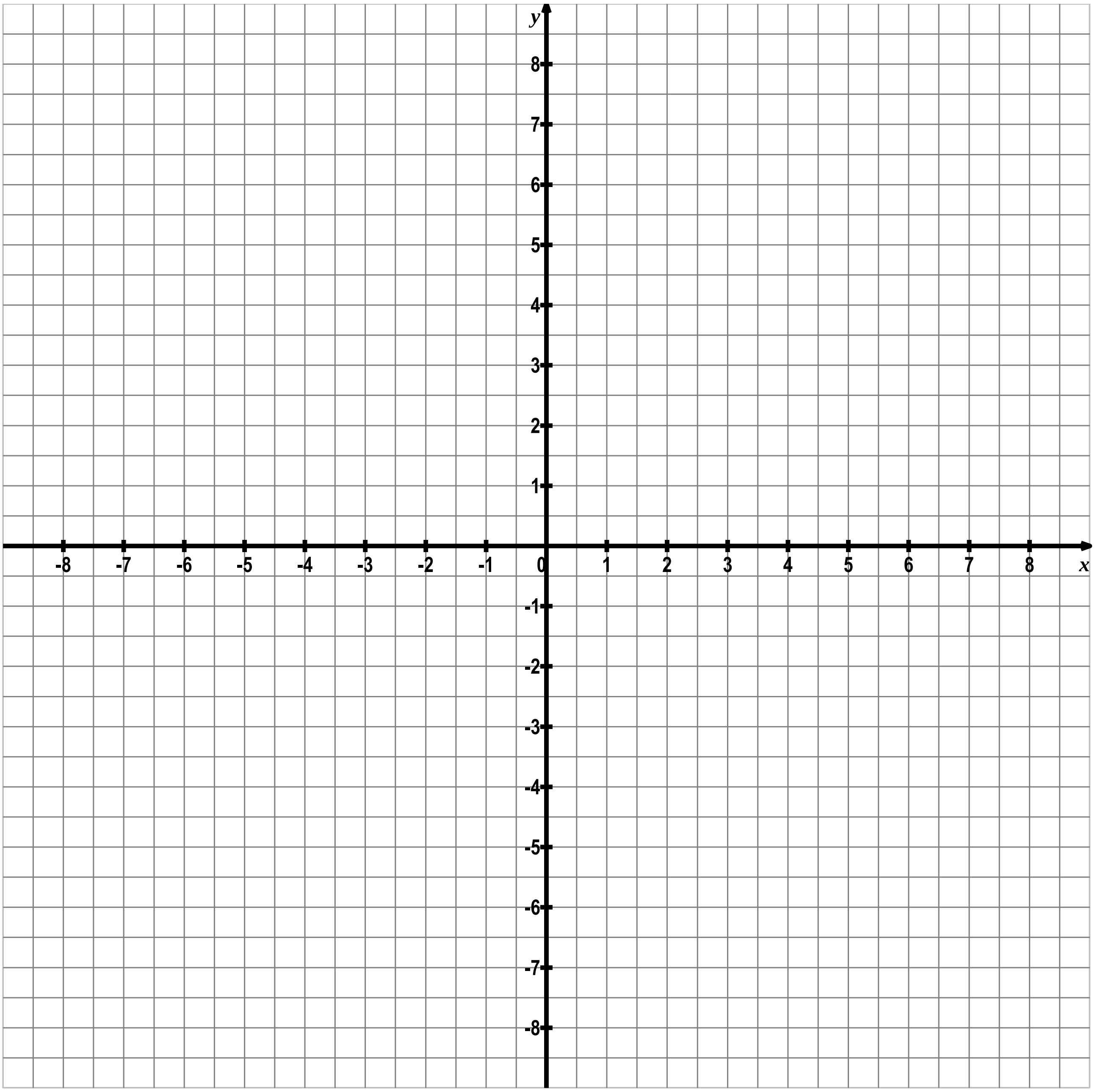


c) Dans chaque cas, calcule la(les) valeur(s) de x pour la(es)quelle(s) la fonction s'annule ? Vérifie sur le graphique.

d) Détermine graphiquement puis par calcul à quelle(s) fonction(s) appartiennent les couples suivants :

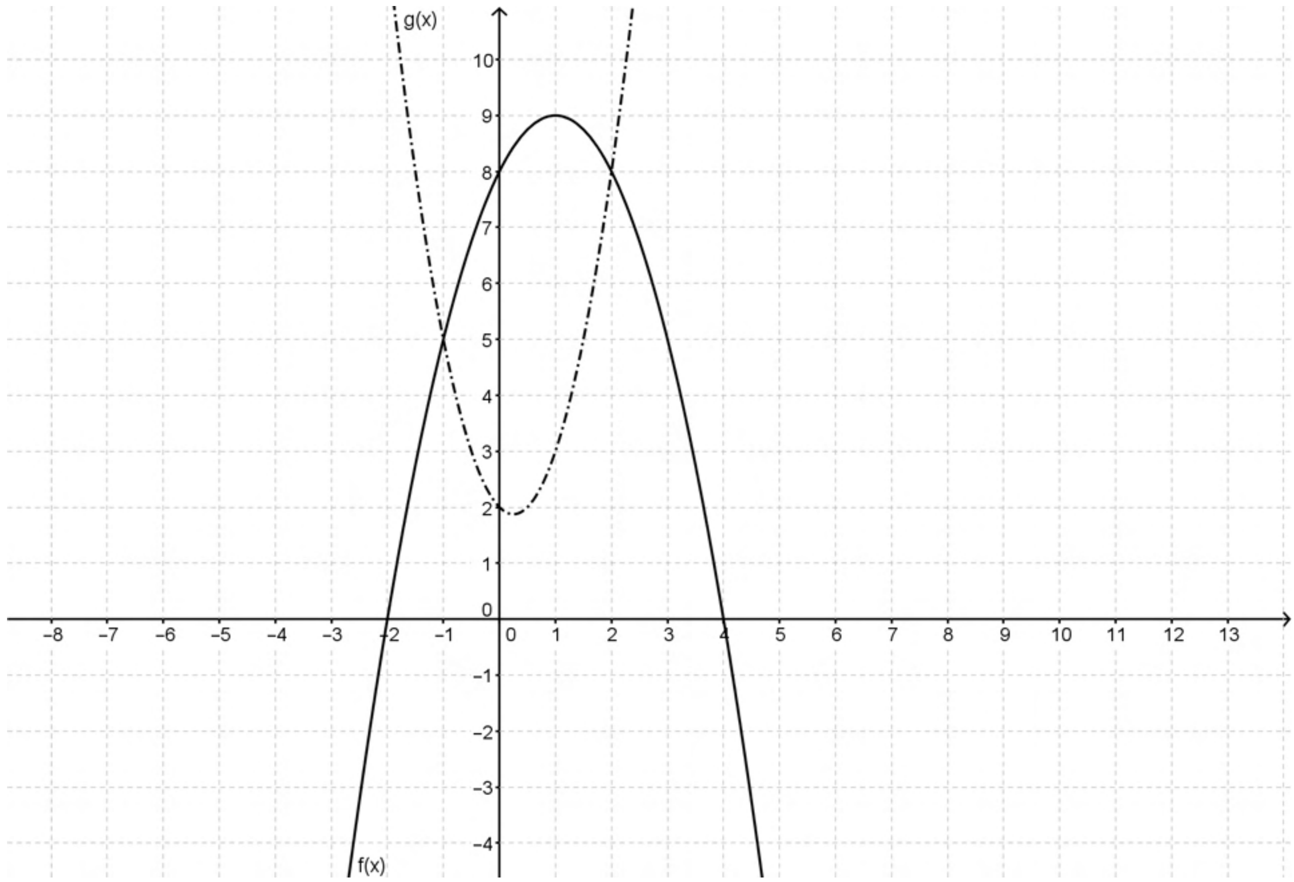
(0 ; 0)   (1 ; 2)   (0 ; -2)   (-2 ; 0)

e) Parmi les fonctions précédentes, quelles sont celles dont la représentation graphique est une droite ? Que constates-tu au niveau de la formule ?



15. *« Au-dessus », « en-dessous »,…*

A partir du graphique, détermine les valeurs de « x » pour lesquelles :



a] f(x) = g(x)

qd x ∈

b] f(x) > g(x)

qd x ∈

c] f(x) < g(x)

qd x ∈

d] f(x) ≥ g(x)

qd x ∈

e] f(x) ≤ g(x)

qd x ∈

f] Dresse le tableau de signes et le tableau de variation de f(x) :

Tableau de signes

x	
f…(x)	

Tableau de variations

x	
f…(x)	

SYNTHESE : APPROCHE GRAPHIQUE D'UNE FONCTION ET DE SES CARATERISTIQUES

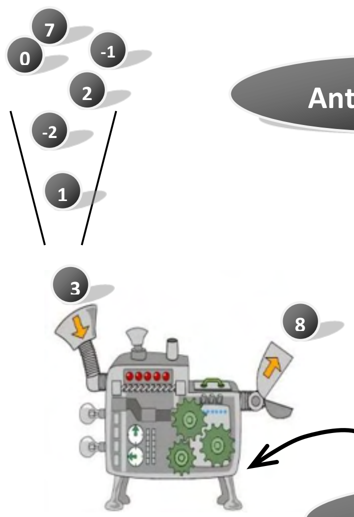
Dans le langage courant, la notion de dépendance entre deux « phénomènes » est souvent traduite par l'expression « … fonction de… » :

- ✓ Le poids est ***fonction de*** la taille ;
- ✓ La température varie ***en fonction de*** l'altitude ;
- ✓ La distance de freinage d'une voiture est ***fonction de*** la vitesse à laquelle cette voiture roule ;
- ✓ …

1. « LES MACHINES A TRANSFORMER DES NOMBRES »

Pour se représenter simplement la notion de « ***fonction*** », on la compare souvent à une « ***machine à transformer les nombres*** » ; puisque en mathématique, on travaille la plupart du temps avec des nombres.

Si on place successivement des nombres dans une machine (voir schéma), d'autres en sorte, calculés ***en fonction*** des premiers (voir pg Fct3-4), suivant une règle. Dans l'exemple schématisé ci-dessous, la règle est : « *tripler le nombre de départ puis lui soustraire 1* ». Ce qui nous permet de dresser un tableau de nombres comme suit :



Antécédents

Nombres de départ	Nombres d'arrivée
3	8
1	2
-2	-7
2	5
0	-1
-1	-4
7	20

x	3x-1

Images (y ou f(x))

Machine

f(x) = 3.x - 1

Remarques :

- ➢ Dans la dernière case du tableau, le nombre de départ étant « x », il a une valeur quelconque. On remplace donc le résultat obtenu par une expression algébrique : 3.x - 1.
- ➢ Plutôt que d'écrire : « *lorsque* ***le nombre introduit dans la machine est 3, le nombre qui ressort est 8*** », les mathématiciens écrivent : « ***machine de (3) = 8*** » ou de manière plus générale : « ***machine de (x) = 3x - 1*** »
- ➢ On désigne souvent une fonction par la lettre « f » ou « g ». Ainsi pour définir une fonction, on écrit la formule (expression analytique) qu'applique cette fonction. Dans notre exemple, la machine qui multiplie les nombres par 3 puis soustrait 1 se notera : f(x) = 3x – 1
- ➢ Une fonction traduit donc une dépendance entre deux grandeurs ; l'une varie librement et s'appelle ***grandeur indépendante (x)***, l'autre varie ***en fonction de*** la première et s'appelle ***grandeur dépendante (y).***

2. NOTION DE RELATION

2.1. Vocabulaire

Dans les différents tableaux des découvertes réalisées, tu exprimes une relation entre des séries de nombres.

Par convention, tu utiliseras :

- ✓ Le mot « ***antécédent*** » et la lettre « ***x*** » pour désigner les éléments de la première grandeur.
- ✓ Le mot « ***image*** » et la lettre « ***y*** » pour désigner les éléments de la deuxième grandeur qui sont dépendants (fonction de) des éléments de la première ligne.

Une relation entre deux grandeurs ***x*** et ***y*** peut être présentée de trois manières différentes :

- ➢ par un **<u>tableau de valeurs</u>** qui associe les différentes valeurs qui se correspondent. Il donne une précision intéressante mais ne donne pas une idée générale de la relation.
- ➢ par un **<u>graphique</u>** (ou graphe cartésien) qui reprend sous forme de coordonnées tous les couples de coordonnées (x ; y). Il permet de visualiser les caractéristiques principales de la relation (croissance, décroissance par exemple) mais ne fournit que peu de précision des valeurs.
- ➢ par une **<u>expression analytique</u>** qui exprime le lien entre les deux grandeurs. Elle permet de calculer des valeurs de la relation d'une manière précise. Elle permet également de reconnaître à quelle famille appartient la relation (fonction du premier degré,…) mais ne permet pas de connaître globalement la variation des valeurs de la relation.

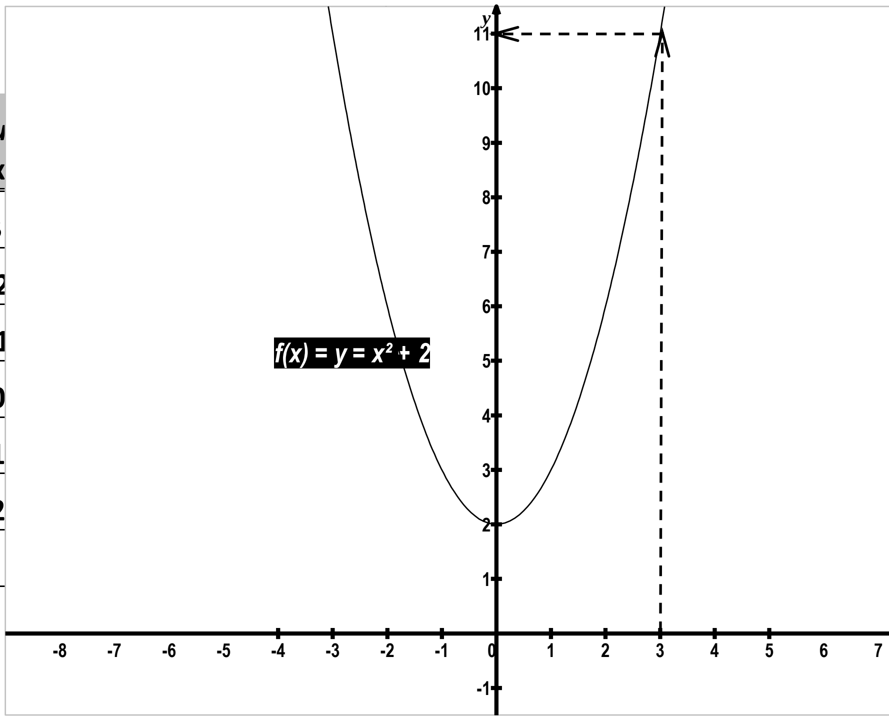
Il est souvent possible de passer d'une de ces trois représentations aux deux autres.

2.2. Exemple

$f(x) = y = x^2 + 2$ → **expression analytique**

Antécédents x	*Images* $y = x^2 + 2$	*Points du* (x
-3	$(-3)^2 + 2 = 11$	(-3
-2	$(-2)^2 + 2 = 6$	(-2
-1	$(-1)^2 + 2 = 3$	(-1
0	$0^2 + 2 = 2$	(0
1	$1^2 + 2 = 3$	(1
2	$2^2 + 2 = 6$	(2
3	$3^2 + 2 = 11$	(3

Tableau de valeurs



Graphique

3. NOTION DE FONCTION

3.1. Vocabulaire

Dans l'exemple ci-dessus, à chaque valeur de « x » correspond une seule image « y ».

Une fonction est une relation entre deux grandeurs *x* et *y* qui, à chaque valeur de *x*, fait correspondre au plus une valeur *y* (0 ou 1 valeur y).

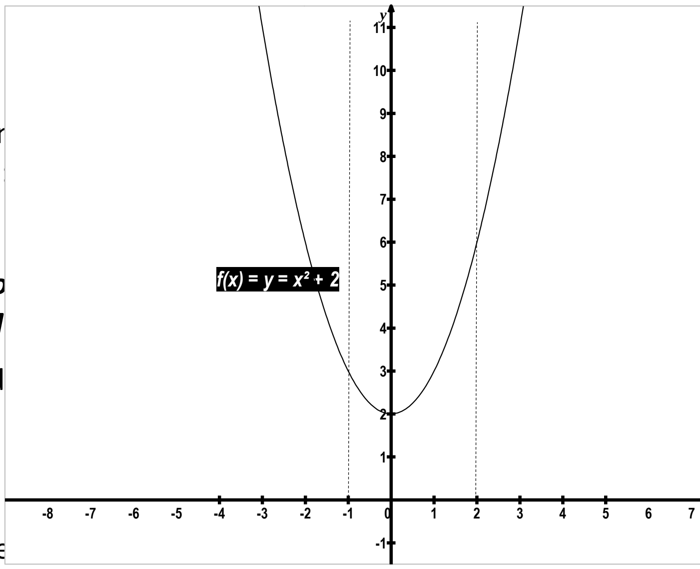
En langage mathématique, on écrit :

$$f : A \rightarrow B : x \rightarrow y = f(x)$$

A = ensemble des objets (ensemble des valeurs que x peut prendre).

B = ensemble des images (ensemble des valeurs que y peut prendre).

Remarque : si les valeurs « x » et « y » sont des nombres réels (comme dans l'exemple), nous parlerons de **fonction numérique d'une variable réelle**.



3.2. Exemple

Dans notre premier exemple, les variables sont des r
ensembles A et B désignent l'ensemble des réels noté R

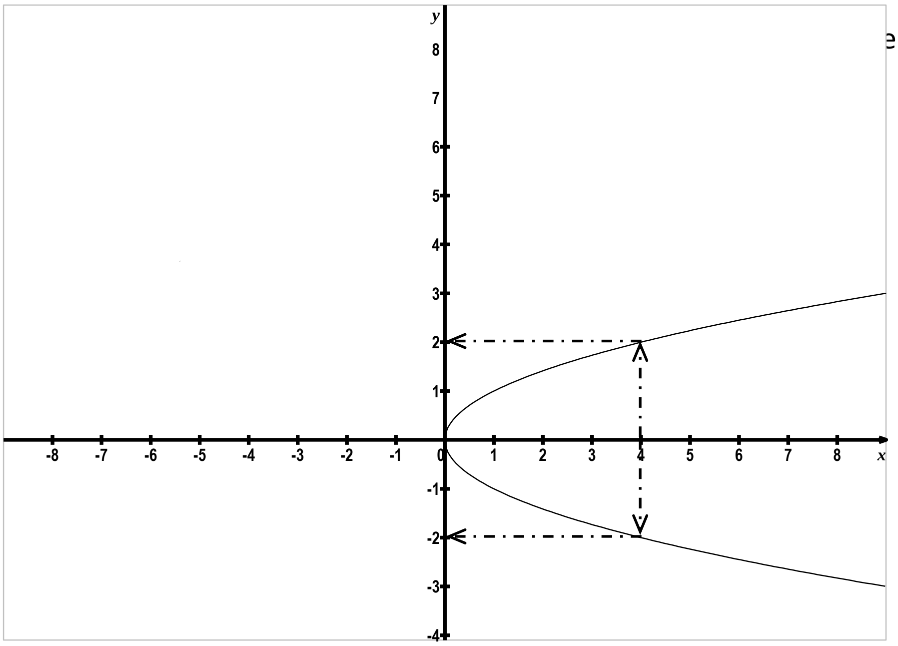
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) = y = x^2 + 2$ ou plus simplement **f(x)**

- Cette courbe représente bien une fonction car ***to***
  à l'axe des ordonnées coupe la courbe en MAXIM
- Deux points différents du graphique ont d
  différentes

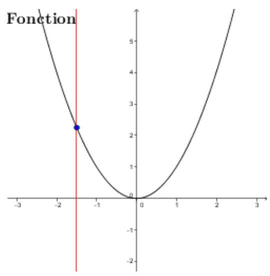
3.3. Contre-exemple

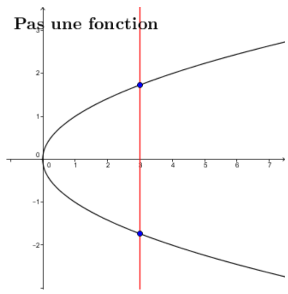
La relation représentée ci-dessous est un contre-exemple

- La courbe qui illustre la relation « ***est le carré de*** » ne représente pas une fonction car il existe ***au moins une parallèle à l'axe des ordonnées qui coupe cette courbe en plus d'un point.***



eurs de « y » :



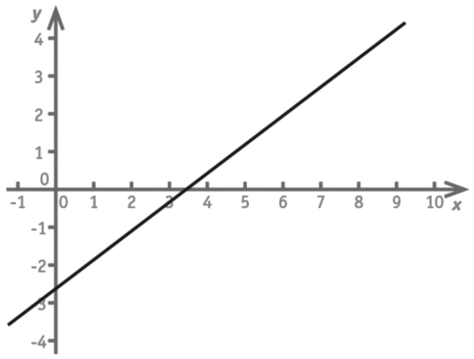


Cette relation entre x et y **n'est pas une fonction**.

Exercices :

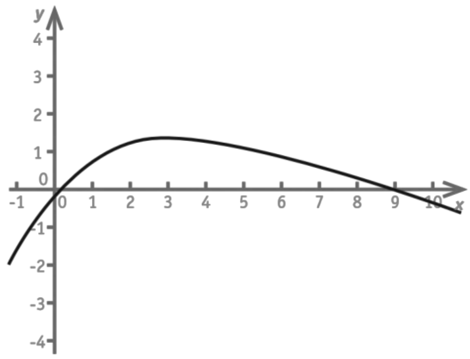
Voici des représentations graphiques de relations entre deux grandeurs. Identifie toutes celles qui sont des représentations de fonctions.

Entoure OUI lorsqu'il s'agit d'une fonction et NON dans le cas contraire.



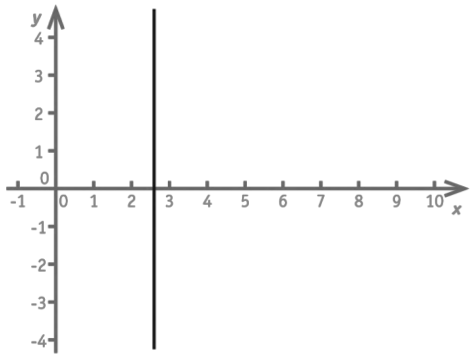
Cette relation est-elle une fonction ?

OUI | NON



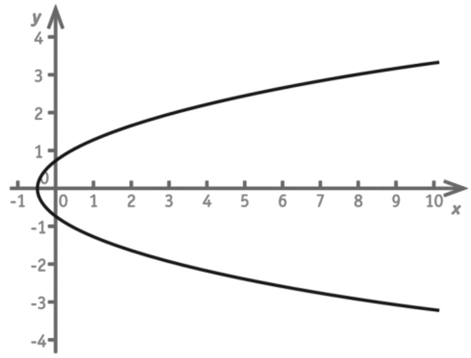
Cette relation est-elle une fonction ?

OUI | NON



Cette relation est-elle une fonction ?

OUI | NON



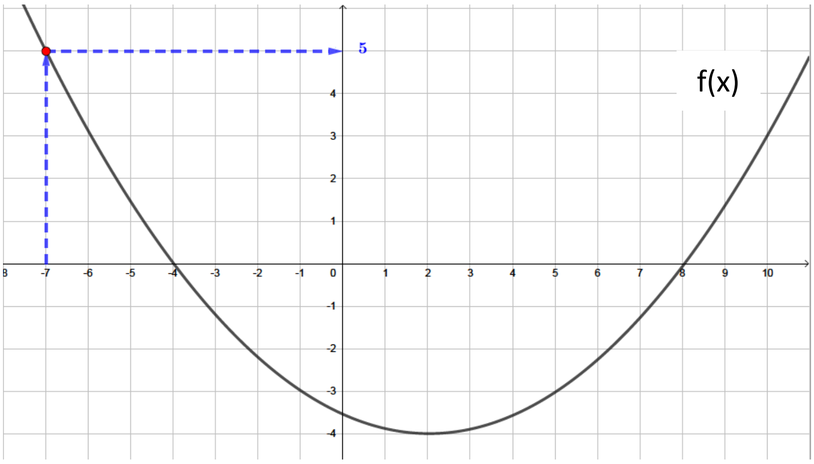
Cette relation est-elle une fonction ?

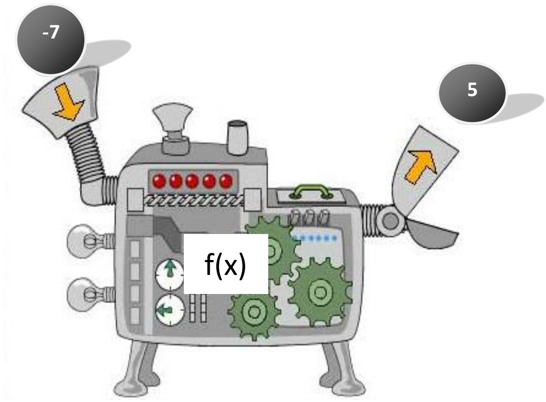
OUI | NON

3.4. Image de…

Dans l’exemple ci-dessous, ***l’image de -7 par la fonction f(x) est 5.***

En L.M. : ***f(-7) = 5***

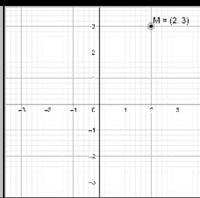
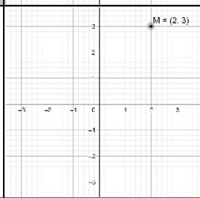
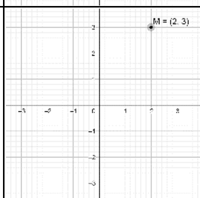
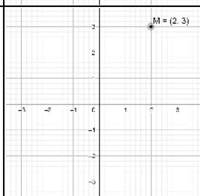
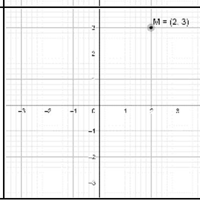




Quelle est l’image de 2 ?

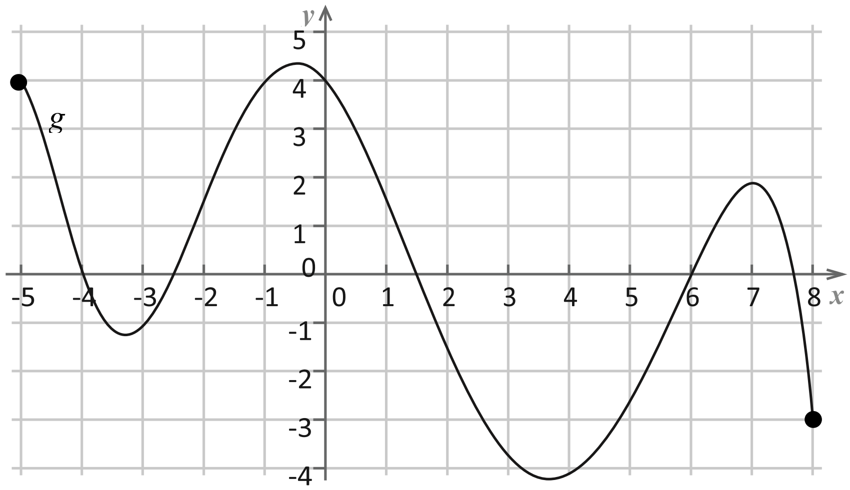
Que vaut f(-4) ?

Voici quatre transcriptions de la notion « d’image de… » à travers une fonction :

Langage symbolique formel	Langage littéraire	Tableau de valeurs	Langage graphique	
f(2) = 3	L’image de 2 par la fonction **f** est 3 ou 2 a pour image 3 par la fonction **f**.	***x*** : 2 ***f(x)*** : 3		Le point M de coordonnées (2 ; 3) appartient au graphe de la fonction f(x)
f(…) = …	L’image de 2 par la fonction **f** est 3 ou 2 a pour image 3 par la fonction **f**.	***x*** : … ***f(x)*** : …		Le point M de coordonnées (-1 ; 4) appartient au graphe de la fonction f(x)
f(…) = …	L’image de 2 par la fonction **f** est 3 ou -2 a pour image -3 par la fonction **f**.	***x*** : … ***f(x)*** : …		Le point M de coordonnées (…;…) appartient au graphe de la fonction f(x)
f(…) = …	L’image de 2 par la fonction **f** est 3 ou 2 a pour image 3 par la fonction **f**.	***x*** : 3 ***f(x)*** : -2		Le point M de coordonnées (…;…) appartient au graphe de la fonction f(x)
f(-4) = -7	L’image de 2 par la fonction **f** est 3 ou 2 a pour image 3 par la fonction **f**.	***x*** : … ***f(x)*** : …		Le point M de coordonnées (…;…) appartient au graphe de la fonction f(x)

Exercices :

1) La courbe ci-dessous représente le graphique de la fonction g définie sur l'intervalle [–5 ; 8].



Pour chacun des énoncés, **coche** toutes les cases adéquates (il peut y avoir une ou plusieurs propositions correctes).

a) Le graphique de la fonction g coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 4. On peut donc écrire :

- ☐ g (4) = 0
- ☐ g (0) = 4
- ☐ (4 ; 0) est un point du graphique de g
- ☐ (0 ; 4) est un point du graphique de g

b) L'image du nombre –2 par la fonction g est :

- ☐ 1
- ☐ 1,5
- ☐ 2,2
- ☐ 3

2) Voici plusieurs phrases relatives à des fonctions. **Traduis** chacune d'elles en une égalité du type *f*(…) = …

L'image de 2 par la fonction f est 5.	***f*(___) = ___**
Le réel 7 est un zéro (une racine) de la fonction f.	***f*(___) = ___**
Le graphique de la fonction f passe par le point de coordonnées (2 ; –3).	***f*(___) = ___**
Le graphique de la fonction f coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 4.	***f*(___) = ___**

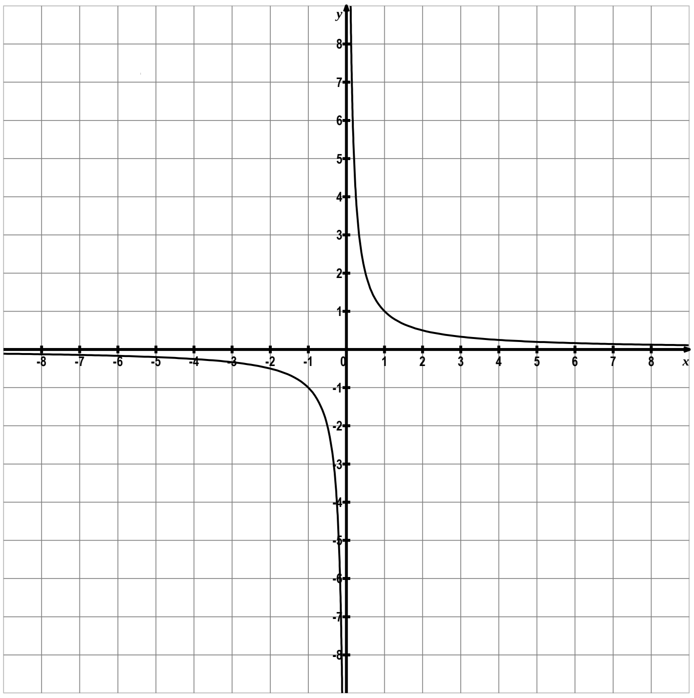
3.5. Domaine de définition d'une fonction

Le domaine de définition d'une fonction f(x) regroupe l'ensemble des valeurs « x » qui ont une image par cette fonction f(x).

Il est noté : ***dom f***

3.5.1. ***Exemples***

Dans les explorations de la notion de fonction, tu as eu l'occasion de rencontrer deux fonctions pour lesquelles certaines valeurs de « x » « ***posaient problème*** » : elles n'avaient pas d'image !



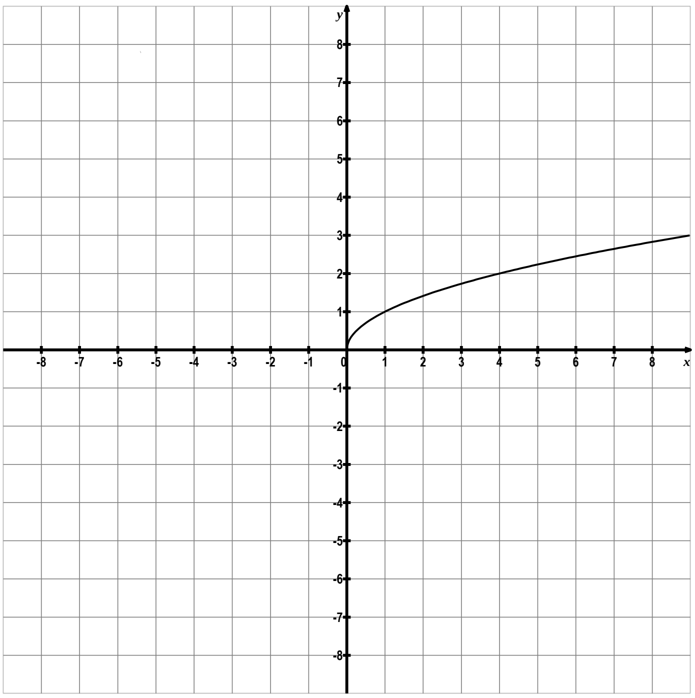
Exemple 1 :

La fonction $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ n'admet aucune image pour x = 0 (1 divisé par 0 n'est pas un nombre réel). Le nombre « 0 » n'a donc pas d'image par cette fonction ; il ne fait pas partie du ***dom*** f_1.
Tous les autres nombres réels ont une image par cette fonction. Le domaine de définition de $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ se notera donc :

dom $f_1 = R / \{0\}$

ou encore

dom $f_1 = R_0$ (tous les réels sauf « 0 »)



Exemple 2 :

La fonction $f_2(x) = \sqrt{x}$ n'admet aucune image pour tous les x négatifs (la racine carrée d'un nombre réel négatif n'est pas un nombre réel). Ces nombres n'ont donc pas d'image par cette fonction ; ils ne font pas partie du ***dom*** f_2.
Tous les nombres réels positifs ont une image par cette fonction. Le domaine de définition de $f_1(x) = \sqrt{x}$ se notera donc :

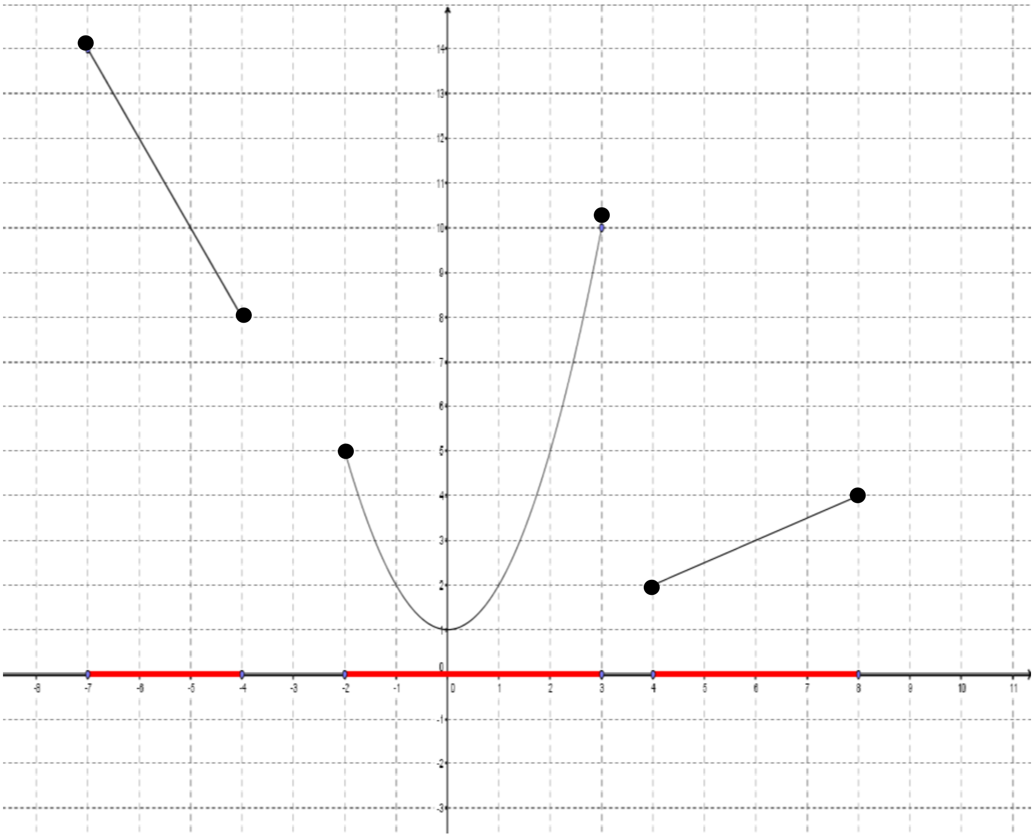
dom $f_2 = [0 ; +\infty[$

ou encore

dom $f_2 = R^+$ (tous les réels positifs)

3.6. Lecture du *Dom f* sur un graphique

En quatrième année, tu apprendras à ***calculer*** le domaine de définition d'une fonction à partir de son expression analytique. Nous nous « contenterons », en troisième, de le déterminer ***à partir du graphique d'une fonction.***

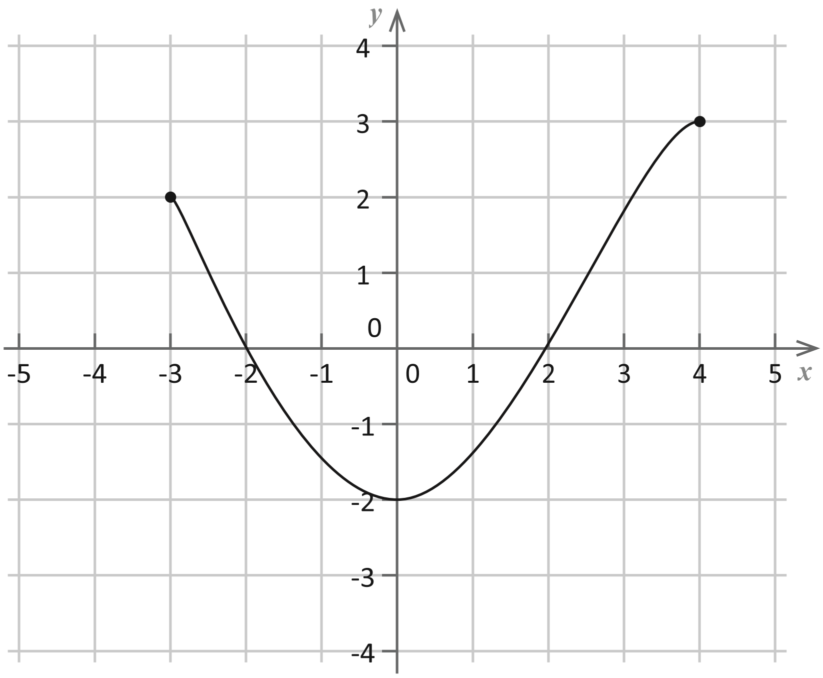


Exemple :

Pour la fonction représentée ci-dessus, le domaine s'écrit : ***Dom f* = [-7 ; -4] ∪ [-2 ; 3] ∪ [4 ; 8]**

Exercices :

1. Quel est le domaine de définition de chaque fonction représentée graphiquement ? **Coche** la case adéquate pour chacune des deux fonctions proposées.



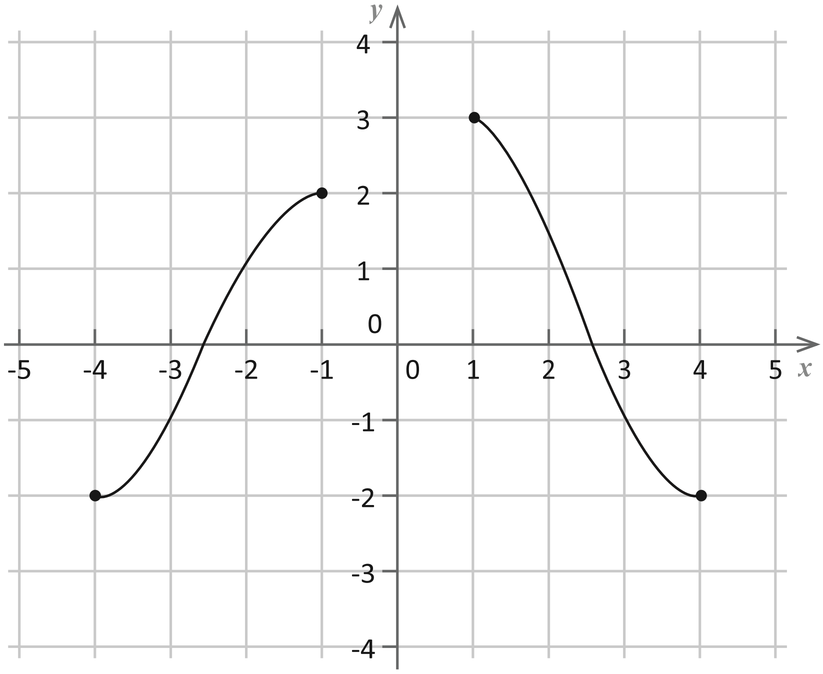
☐ [−2 ; 3]

☐ [3 ; −2]

☐ [−3 ; 4]

☐ [4 ; −3]

Collège Saint-Barthélemy
Y. Michiels
Mathématique – Troisième année



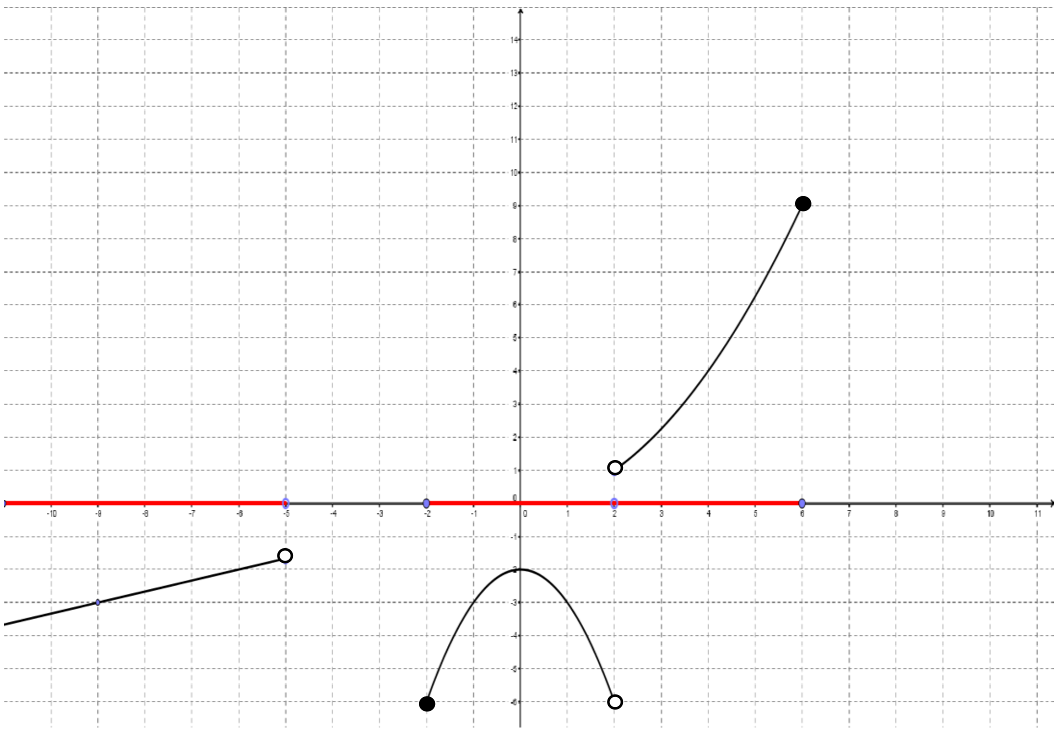
☐ [−4 ; −1] ∪[1 ; 4]

☐ [−4 ; 4]

☐ [−4 ; 0[∪]0 ; 4]

☐ [−2 ; 3]

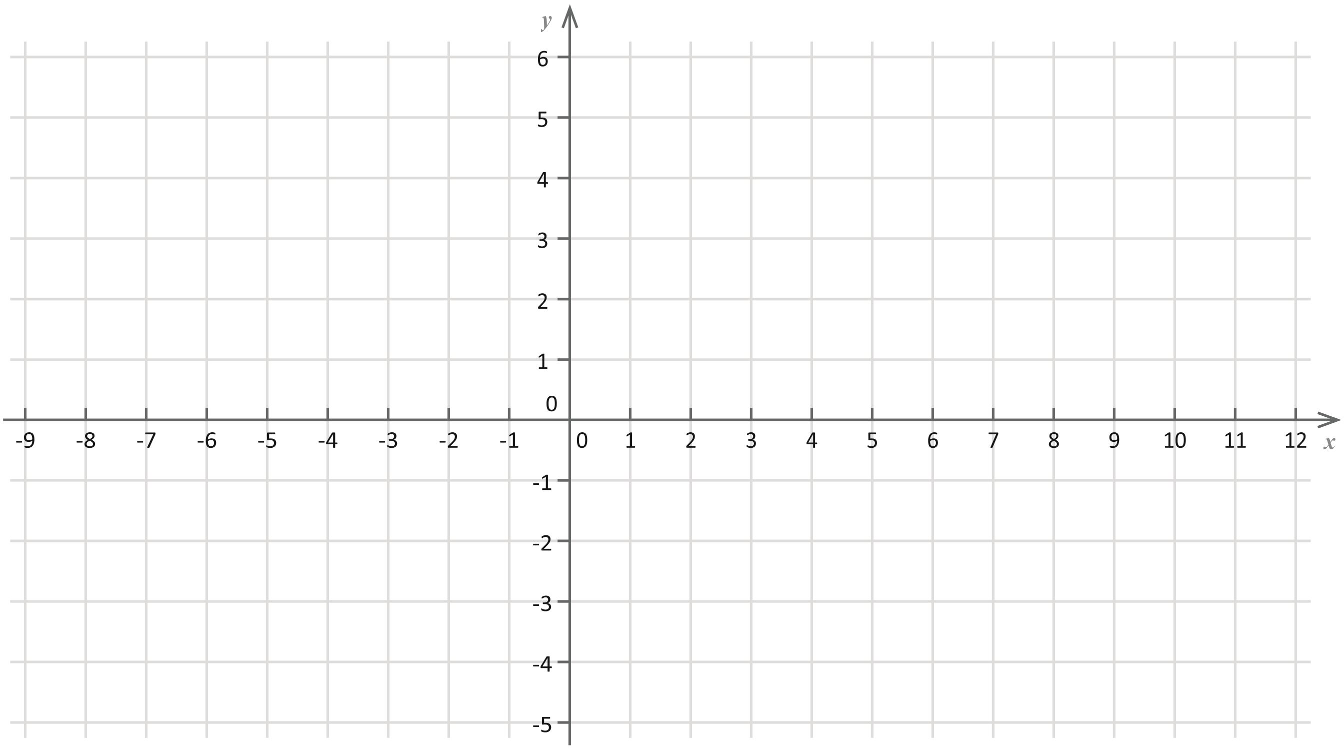
2. Ecris le domaine de la fonction ci-dessous :



Dom f =

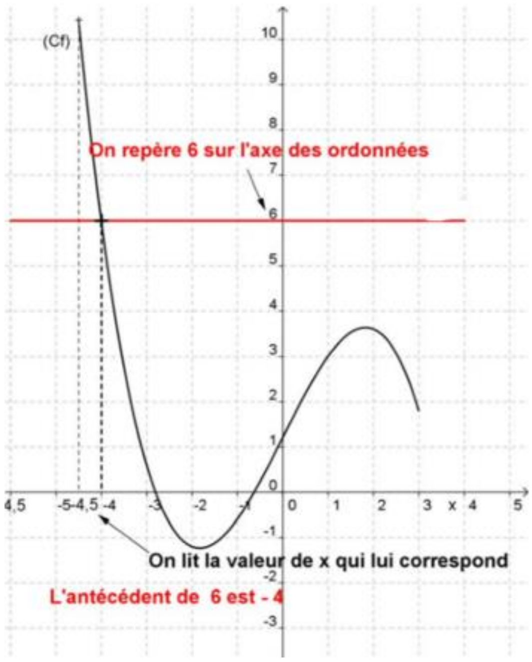
3. Trace le graphique d'une fonction f(x) telle que :

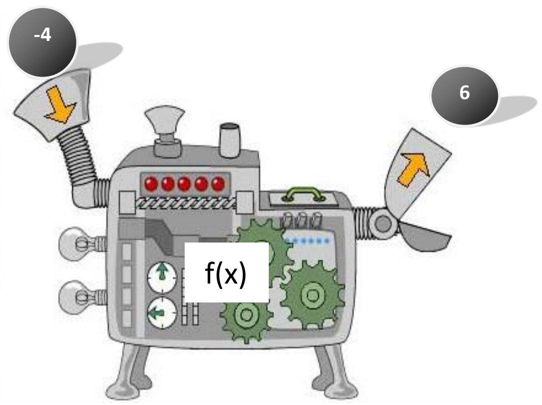
   - Domf =]-6 ; -3] ∪ [-1 ; 5[∪]5 ; 8] ∪ [10 ; +∞[
   - f(-4) = 2 ; f(2) = -2 et f(6) = 4
   - x = -3 et x = 6 sont des zéros
   - l'ordonnée à l'origine vaut 3



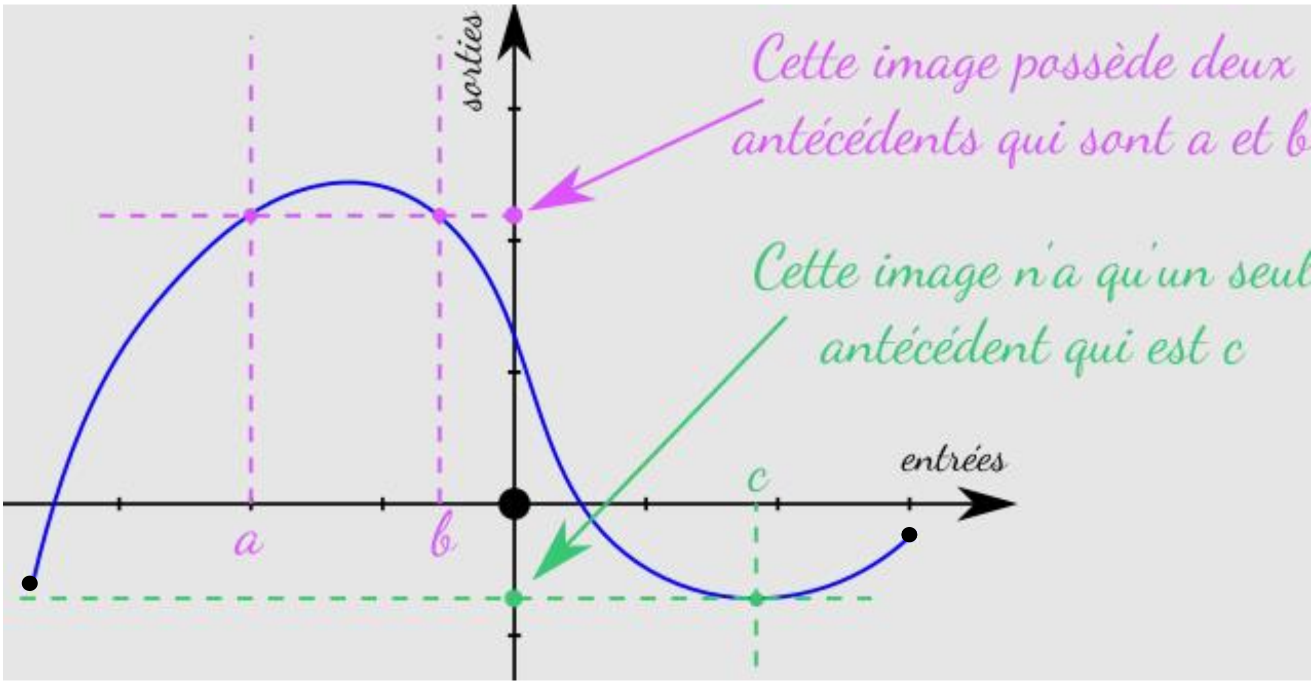
3.7. Antécédent(s) de…

Dans l'exemple ci-dessous, l'antécédent de 6 par la fonction f(x) est -4.
En L.M. : f(x) = 6 si x = -4



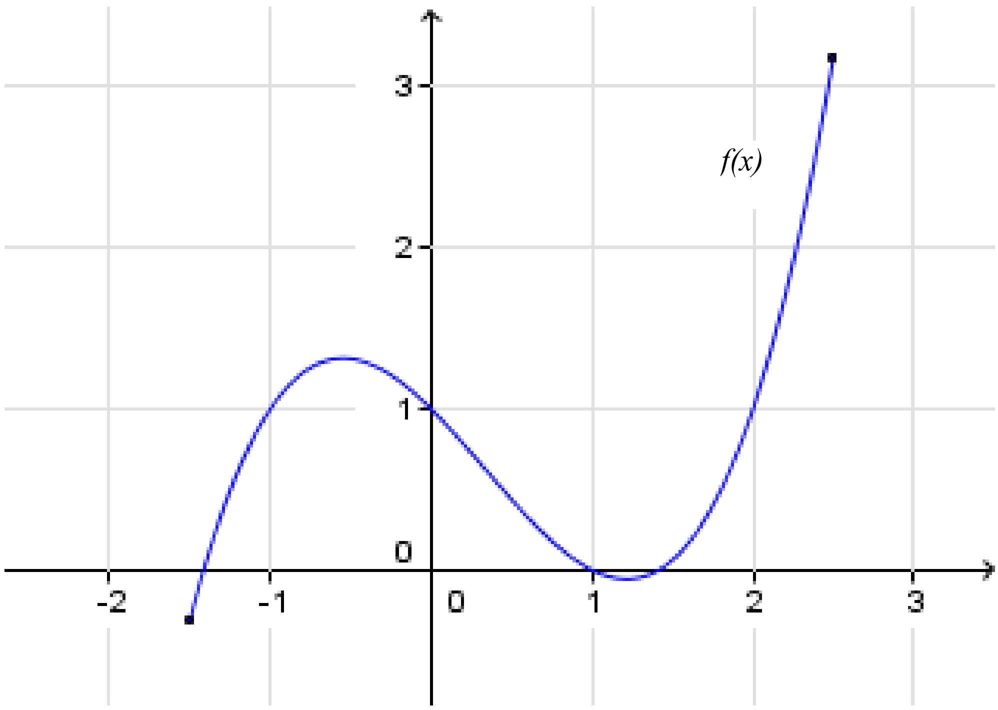


Pour une valeur y en sortie, il peut exister une ou plusieurs valeurs x en entrée qui ont y pour image. On dit que chacune de ces valeurs est un antécédent de y par la fonction f.



__Exemple__ :

A partir du graphique suivant, détermine :



- le ou les éventuels antécédent(s) de 1 par la fonction f(x) →
- le ou les éventuels antécédent(s) de -1 par la fonction f(x) →
- le ou les éventuels antécédent(s) de 3 par la fonction f(x) →
- les valeurs de x si f(x) = 2 →
- les valeurs de x si f(x) = 0 →

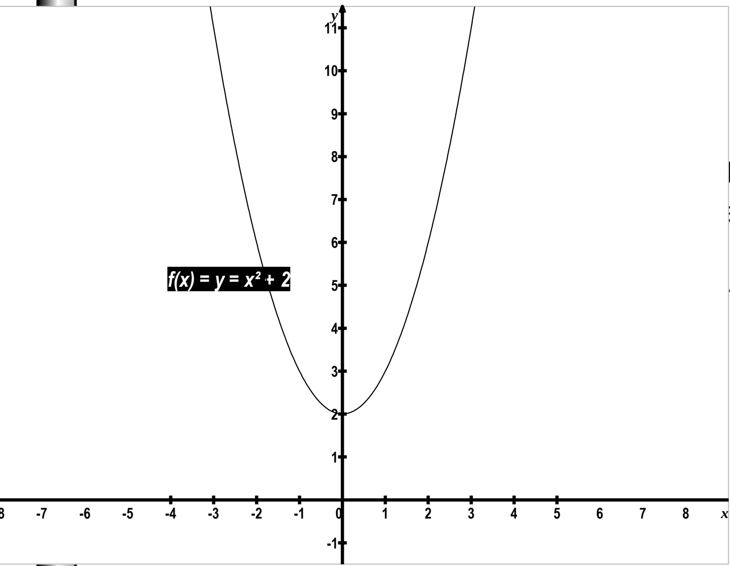
3.8. Ensemble *Image* d'une fonction

L'ensemble image d'une fonction f(x) regroupe l'ensemble des valeurs « y » qui sont images d'au moins une valeur « x » par la fonction f(x).

Il est noté : ***Im f***

3.8.1. Exemples

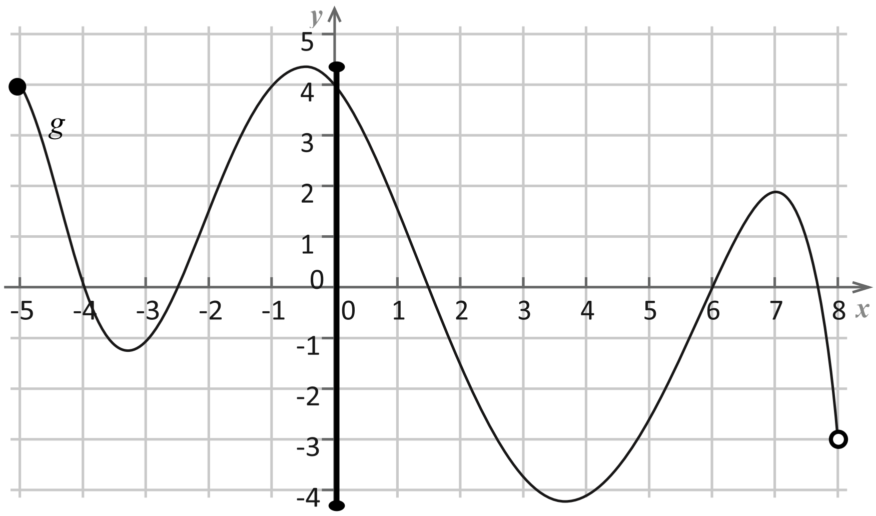
Exemple 1 :



fonction envisagée dans l'exemple d'introduction, e image est [2 ; +∞]. On notera :

+∞]

Exemple 2 :



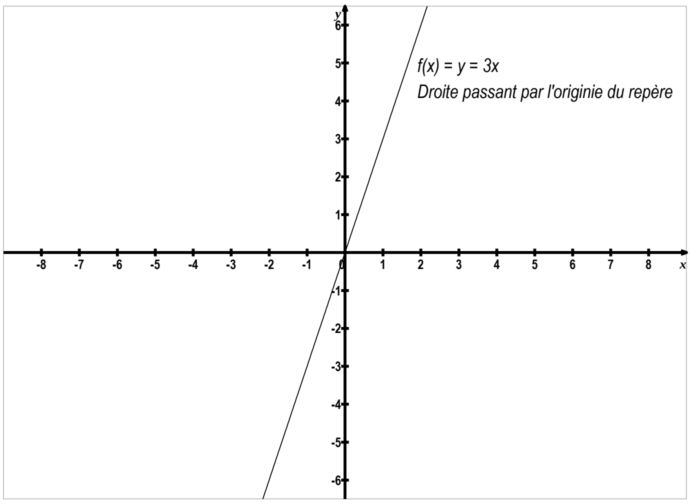
Pour la fonction envisagée dans l'exemple ci-contre, l'ensemble image est :

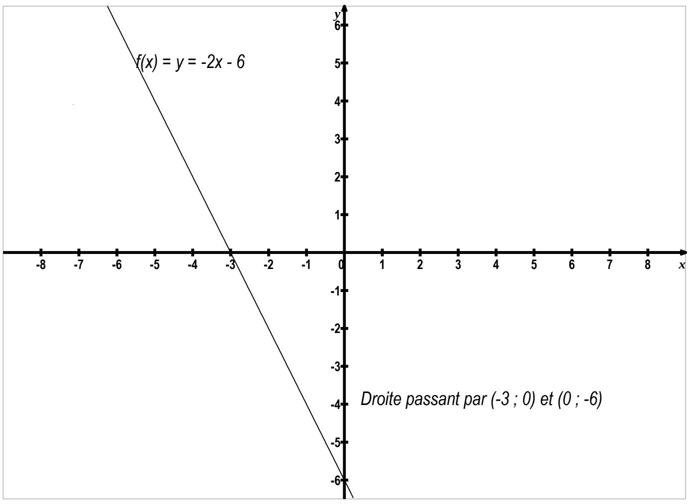
Im f = [-4,2 ; 4,2]

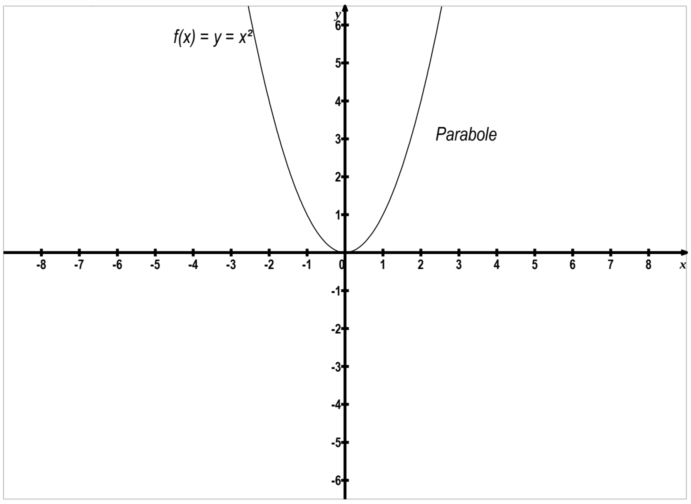
3.9. Représentation graphique de fonctions diverses

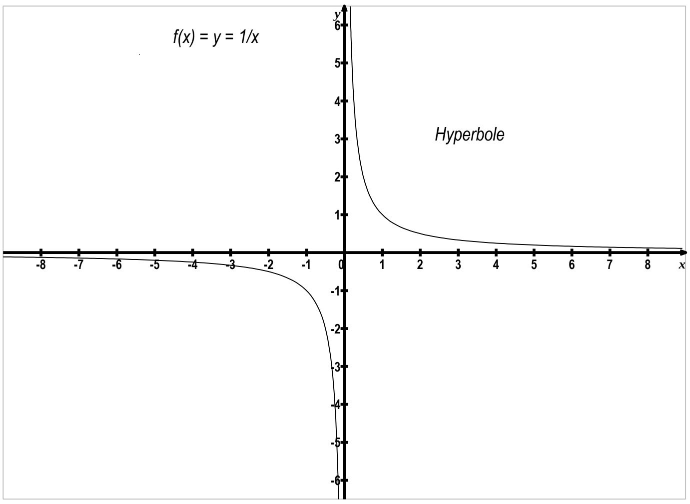
Pour les différentes fonctions que nous avons rencontrées, nous avons construit le graphique **point par point** en cherchant les coordonnées d'un grand nombre de points. Selon le type de fonction, le graphique peut être une droite, une parabole, une hyperbole, une autre courbe,…

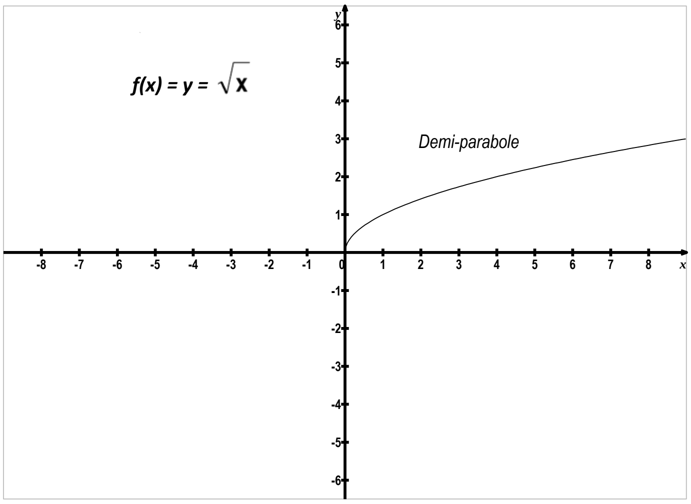
Exemples de fonctions construites point par point :

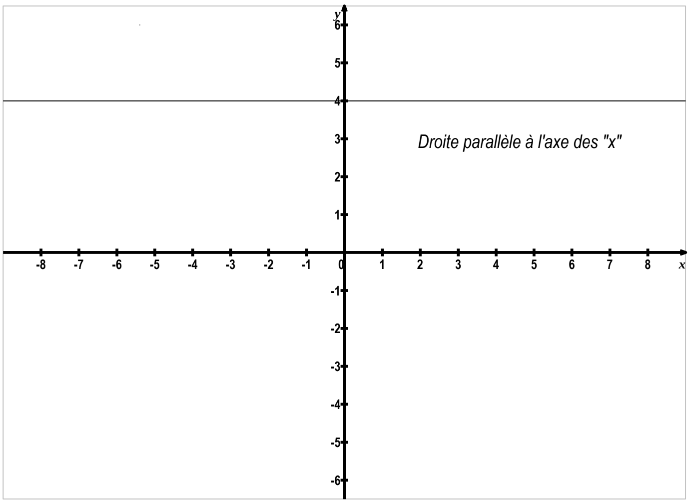






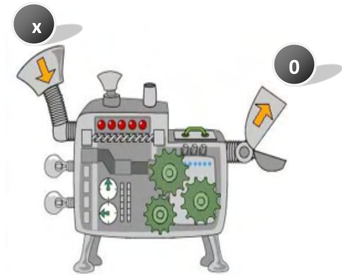






Les points en lesquels le graphique d'une fonction coupe les axes de coordonnées sont des points particuliers.

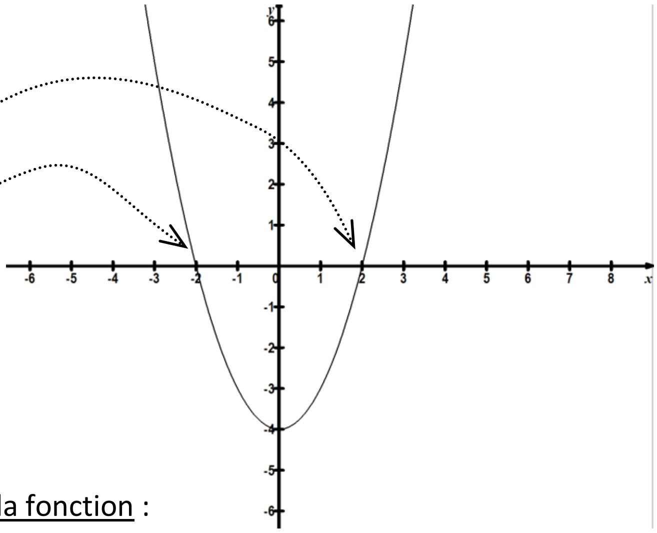
3.10. Zéro d'une fonction



L'abscisse d'un point d'intersection entre **l'axe des x et le graphique** de la fonction est appelé **zéro** de la fonction.

Le(s) zéros d'une fonction y = f(x), ce sont le(s) valeurs de x dont l'image à travers la fonction est égale à zéro (y ou f(x) = 0).

Calcul des zéros à partir de la formule décrivant la fonction :



Calculer les zéros d'une fonction revient à résoudre l'équation f(x) ou y = 0

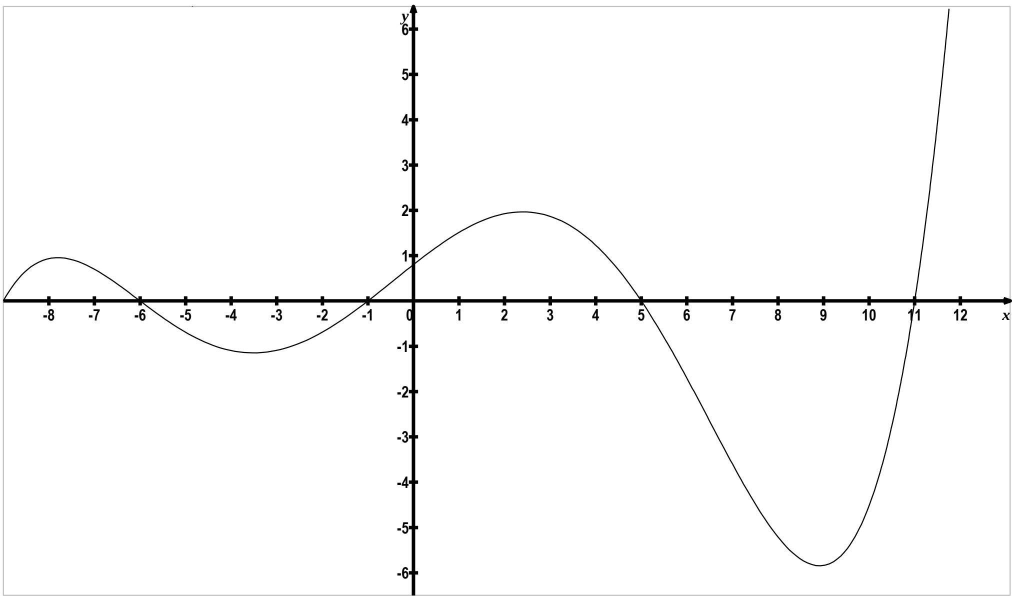
Soit la fonction **f : R → R : x → f(x) = y = x^2 - 4**

$$y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$$

Les ***zéros*** de cette fonction sont : x = 2 et x = -2.

Les ***points intersections*** entre le Graphe de la fonction et l'axe des « x » sont : (2 ; 0) et (-2 ; 0).

Détermination des zéros à partir du **graphique** décrivant la fonction :



Un zéro d'une fonction est l'abscisse d'un point d'intersection du graphique avec l'axe des x.

Les ***zéros*** de cette fonction sont : x = -9 ; x = -6 ; x = -1 ; x = 5 et x = 11.

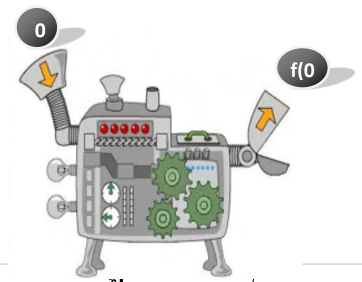
Les ***coordonnées des points intersections*** entre le graphique de cette fonction et l'axe des « x » sont :

(-9 ; 0) ; (-6 ; 0) ; (-1 ; 0) ; (5 ; 0) et (11 ; 0).

Remarque :

La lecture sur le graphique est parfois imprécise ; c'est pourquoi il est plus intéressant de calculer les zéros plutôt que de les repérer.

3.11. Ordonnée à l'origine



L'ordonnée du point d'intersection entre **l'axe des y et le graphique** de la fonction est appelé **ordonnée à l'origine** de la fonction.

L'ordonnée à l'origine d'une fonction est l'image de « 0 » par cette fonction *(f(0))* pour autant que la fonction soit définie en 0 **(il faut que 0 ait une image).**

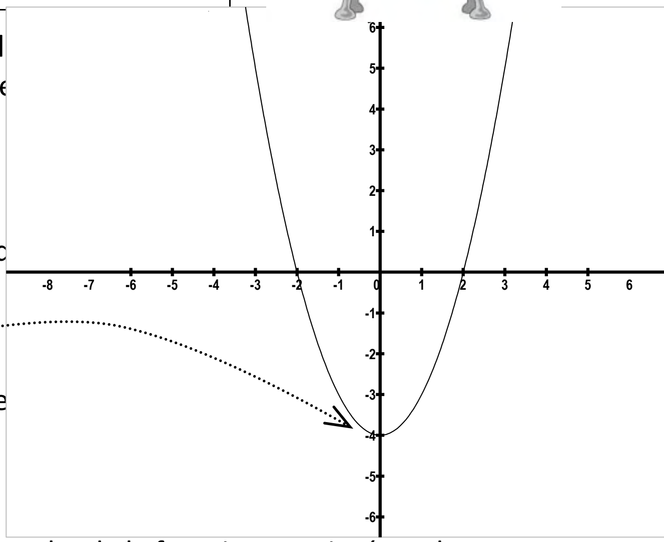
Calculer l'ordonnée à l'origine d'une fonction revient à calcul
(c'est-à-dire remplacer « x » par « 0 » et calculer la valeur de

Soit la fonction **f : R → R : x → f(x) = y = x² - 4**

$f(0) = 0^2 - 4 = -4$

Ce nombre est l'ordonnée du point d'intersection du graphic la fonction avec l'axe des ordonnées.

L'ordonnée à l'origine de cette fonction est -4.

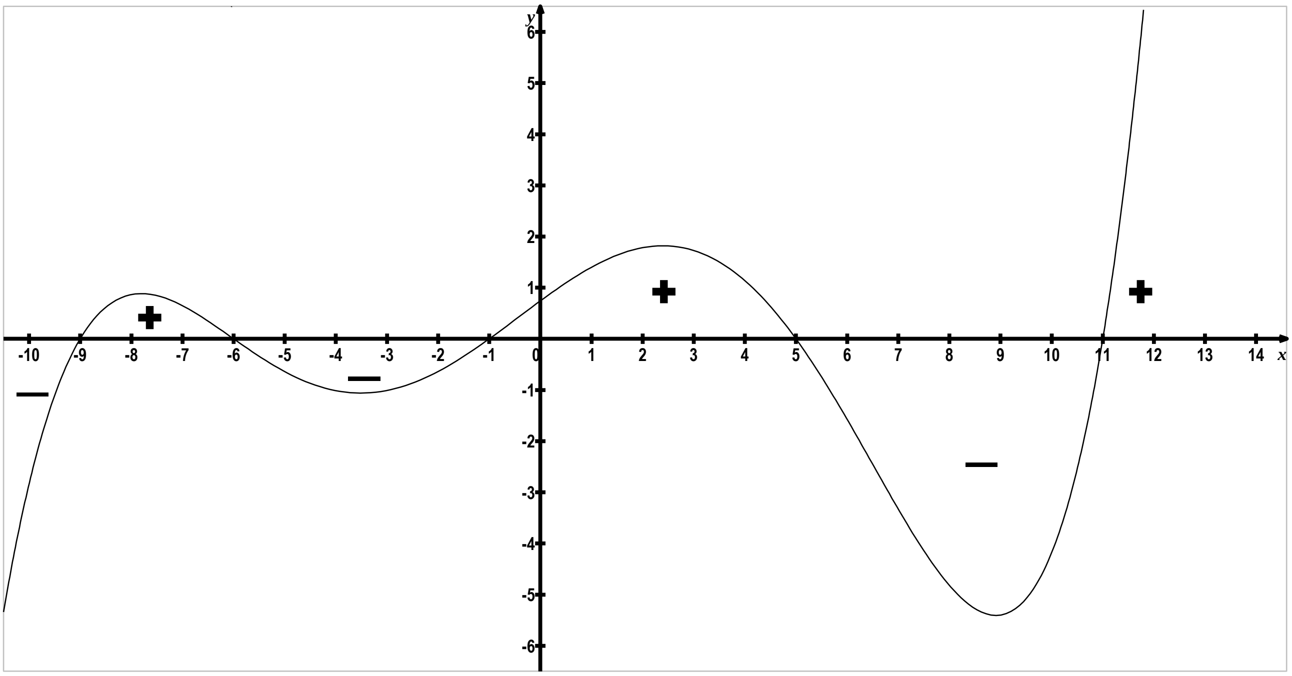


Les ***coordonnées du point d'intersection*** entre le Graphe de fonction et l'axe des « y » est : (0 ; -4).

3.12. Signe d'une fonction

Quand les valeurs des images sont positives (f(x) = y > 0), le graphe de la fonction est situé au-dessus de l'axe horizontal. En ces points, la fonction est dite « ***strictement positive*** ».

Quand les valeurs des images sont négatives (f(x) = y < 0), le graphe de la fonction est situé en dessous de l'axe horizontal. E n ces points, la fonction est dite « ***strictement négative*** ».



Exemple :
Cela peut être traduit sous forme d'un tableau de signe :

x		-9		-6		-1		5		11		← *Zéros*
y	–	0	+	0	–	0	+	0	–	0	+	

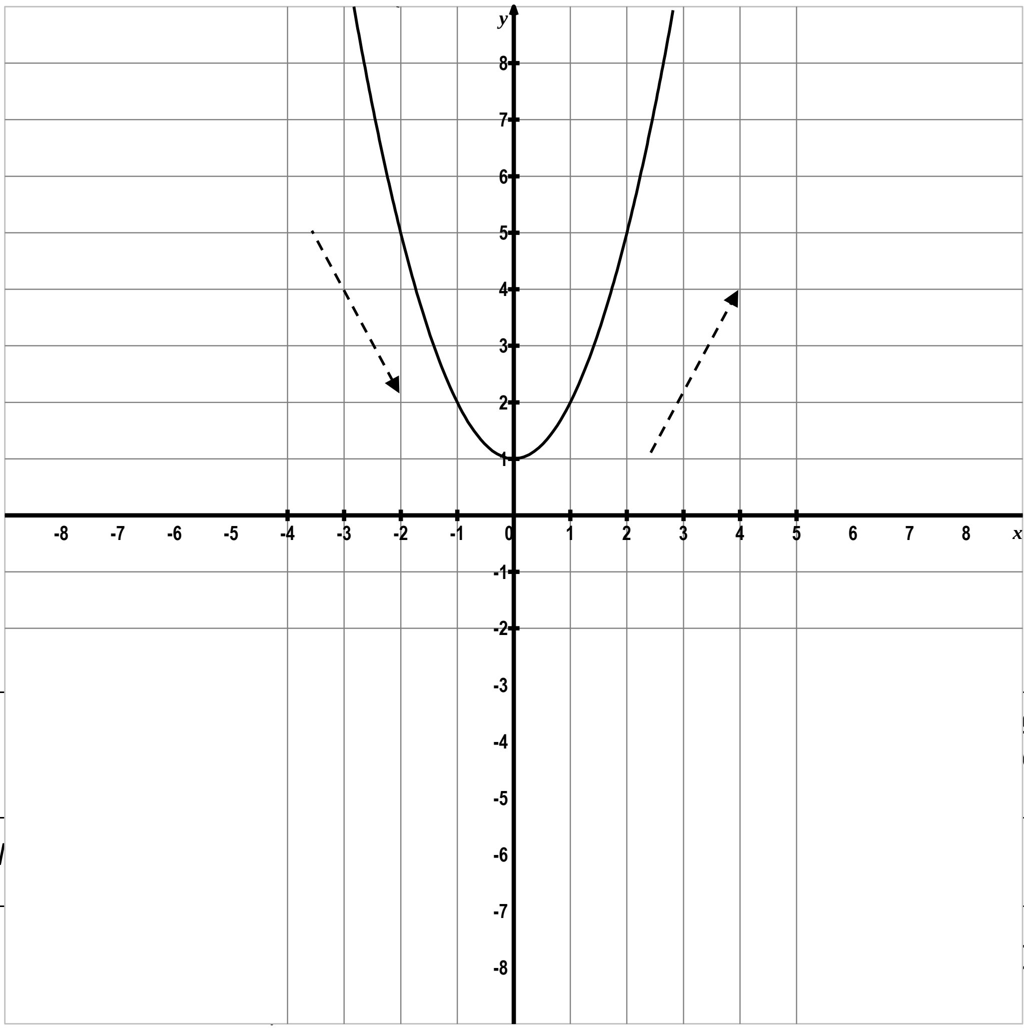
Si « x » est plus petit que -9, son image « y » sera négative.

Si « x » est compris entre -1 et 5, son image « y » sera positive

3.13. Croissance et décroissance – Tableau de variations

Quand tu parcours le « tracé » d'une fonction de gauche à droite (pour des valeurs de « x » croissantes), la courbe « monte » ou « descend ». On dit que la fonction est **croissante** ou **décroissante**.

En cinquième année, tu apprendras à déterminer par calcul sur quels intervalles une fonction est ***croissante***, ***décroissante*** ou ***constante***. Ici, nous allons nous contenter de dresser un tableau de variation de fonction à partir de son graphique.



- ***croissent dans***
vers la gauche,

Dans l

- ***croissent dans***
s la gauche, la

Dans l'intervalle]-∞ ; 0[, quand les « x » augmentent, les « y » diminuent

Tableau de variation de la fonction ci-dessus :

x	-∞	0	+∞
y	↘	**1** **minimum en (0 ; 1)**	↗

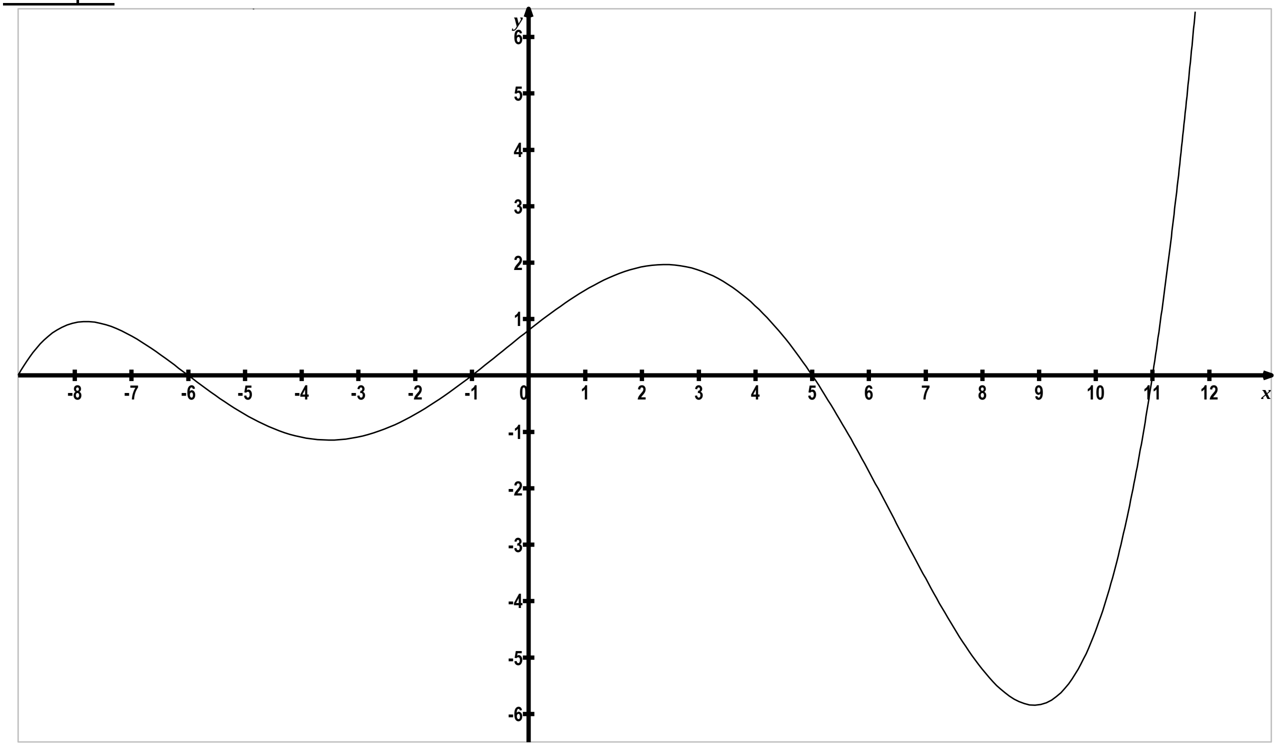
← ***Maximum et minimum locaux***

Remarque :

Quand l'ordonnée d'un point est supérieure à celles des points du graphique d'une fonction, situés dans son voisinage, on dit que ce point est un ***maximum local*** (ce n'est pas nécessairement le point le plus « haut » du graphique de la fonction). Le point « le plus haut » du graphique est appelé ***maximum absolu***.

Quand l'ordonnée d'un point est inférieure à celles des points du graphique d'une fonction, situés dans son voisinage, on dit que ce point est un un ***minimum local*** (ce n'est pas nécessairement le point le plus « bas » du graphique de la fonction). Le point « le plus bas » du graphique est appelé ***minimum absolu***.

Exemple :



La fonction est strictement croissante pour :

$x \in]-9 ; -7,8[$ et $x \in]-3,5 ; 2,5[$ et $x \in]9 ; +\infty[$

La fonction est strictement décroissante pour :

$x \in]-7,8 ; -3,5[$ et $x \in]2,5 ; 9[$

Tableau de variations de la fonction représentée ci-dessus :

x		**-7,8**		**-3,5**		**2,5**		**9**		← **Extrémum**
y	↗	**1** Maximum en (-7,8 ; 1)	↘	**-1** minimum en (-3,5 ; -1)	↗	**2** Maximum en (2,5 ; 2)	↘	**-6** minimum en (9 ; -6)	↗	

3.14. Appartenance d'un point au graphique d'une fonction

Un point appartient au graphique d'une fonction si ses coordonnées vérifient l'équation de la fonction.
Soit la fonction **f : R → R : x → f(x) = y = x^2 - 4**

- Le point de coordonnée (-3 ; 5) appartient au graphique de f car f(-3) = 5

  En effet :

  $\boldsymbol{5} = (\boldsymbol{-3})^2 - 4$

- Le point de coordonnée (1 ; 5) n'appartient pas au graphique de f car f(1) ≠ 5

  En effet :

  $\boldsymbol{5} \neq (\boldsymbol{1})^2 - 4$

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES
MATH POUR RÉUSSIR : PAGES 89 À 91

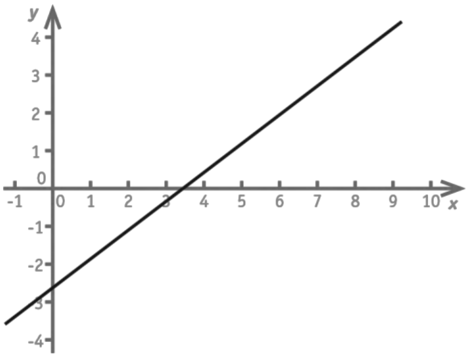
EXERCICES : GENERALITES SUR LES FONCTIONS

1. *Fonction ou simple relation ?*

CONNAÎTRE

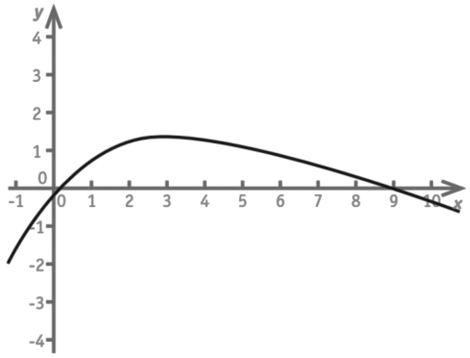
Voici des représentations graphiques de relations entre deux grandeurs.
Identifie toutes celles qui sont des représentations de fonctions.

Entoure OUI lorsqu'il s'agit d'une fonction et NON dans le cas contraire.



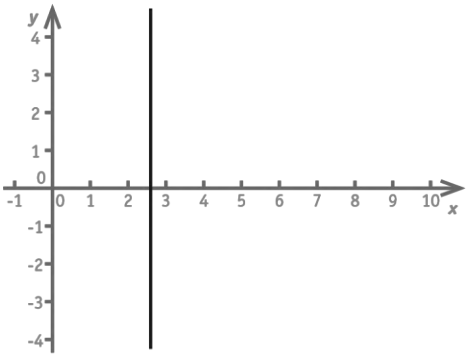
Cette relation est-elle une fonction ?

OUI | NON



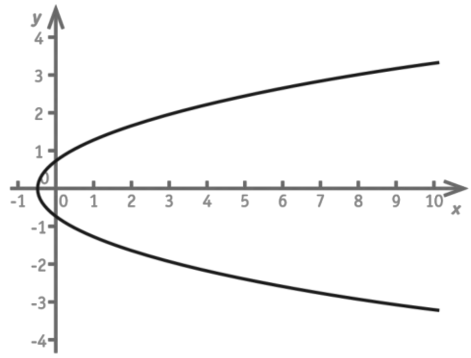
Cette relation est-elle une fonction ?

OUI | NON



Cette relation est-elle une fonction ?

OUI | NON



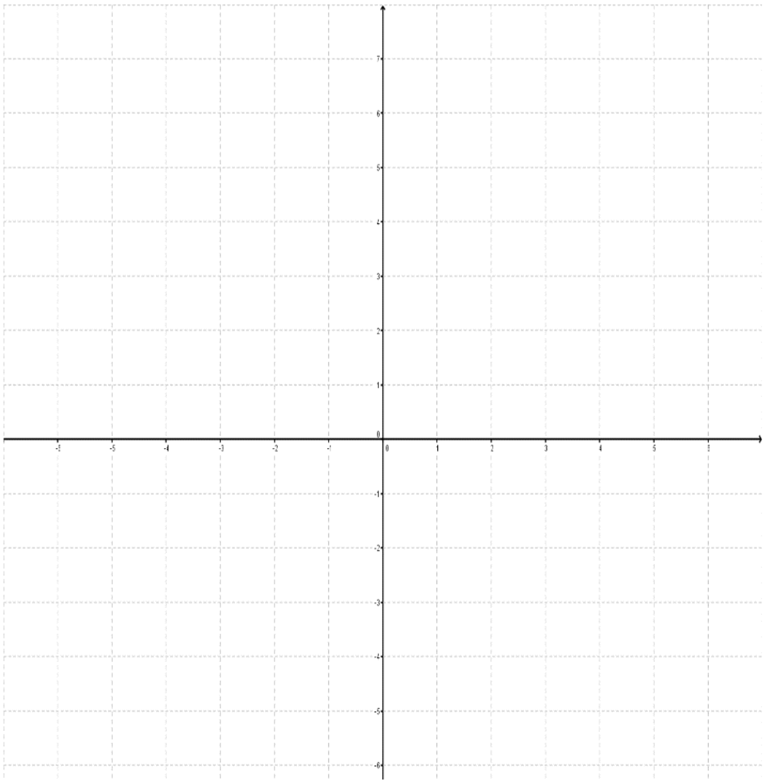
Cette relation est-elle une fonction ?

OUI | NON

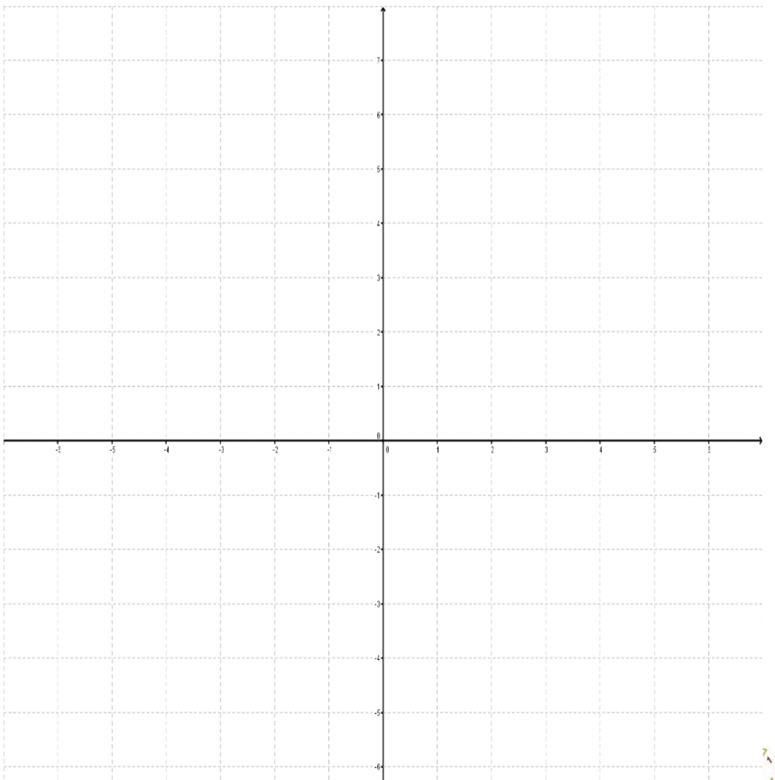
2. *Représentation de fonction ou relation non fonctionnelle.*

a] Trace le graphique d'une fonction $f_1(x)$ dont

- le domf = [-4 ; 3]
- les zéros sont : x = -2 et x = 1
- l'ordonnée à l'origine est : y = 3

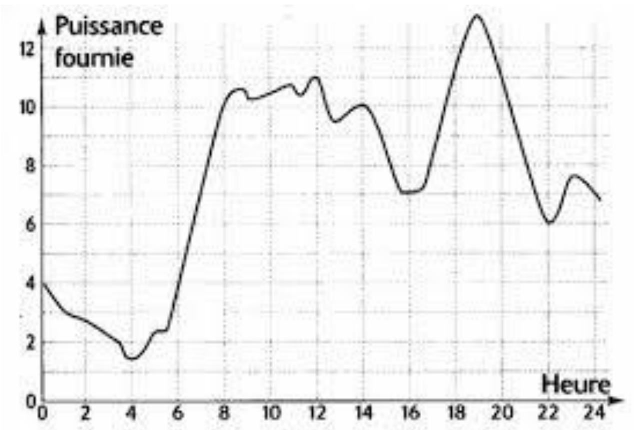


b] Trace le graphique d'une relation qui n'est pas une fonction dont les abscisses des points du graphique se situent dans l'intervalle [-3 ; 5].



3. *Puissance de centrale hydrauliques*

Ce graphique représente l'évolution de la puissance fournie en Gw (gigawatts) au cours d'une journée par l'ensemble des centrales hydrauliques en France.



a] Quelle puissance fournissent ces centrales :

- à 6h ?
- à 8h ?
- à 22h ?
-

b] A quel(s) moment(s) de la journée fournissent-elles :

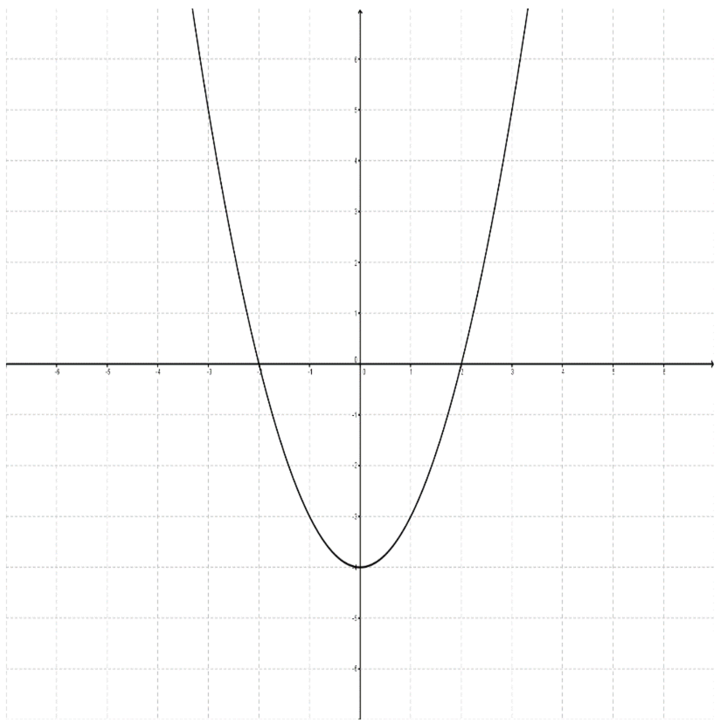
- une puissance de 8 Gw ?
- la puissance maximale ?
- la puissance minimale ?

c] Si on note P(h) la puissance P en fonction de l'heure de la journée, résous l'équation et l'inéquation suivantes :

- P(h) = 6
- P(h) > 8

4. *Images et antécédents*

On a représenté ci-dessus le graphique de la fonction f. En lisant les résultats sur le graphique, détermine :



a] L'image de 3 par la fonction f :

b] Le(s) antécédent(s) de -3 :

c] f(0) =

d] f(1) =

e] f(…) = -2

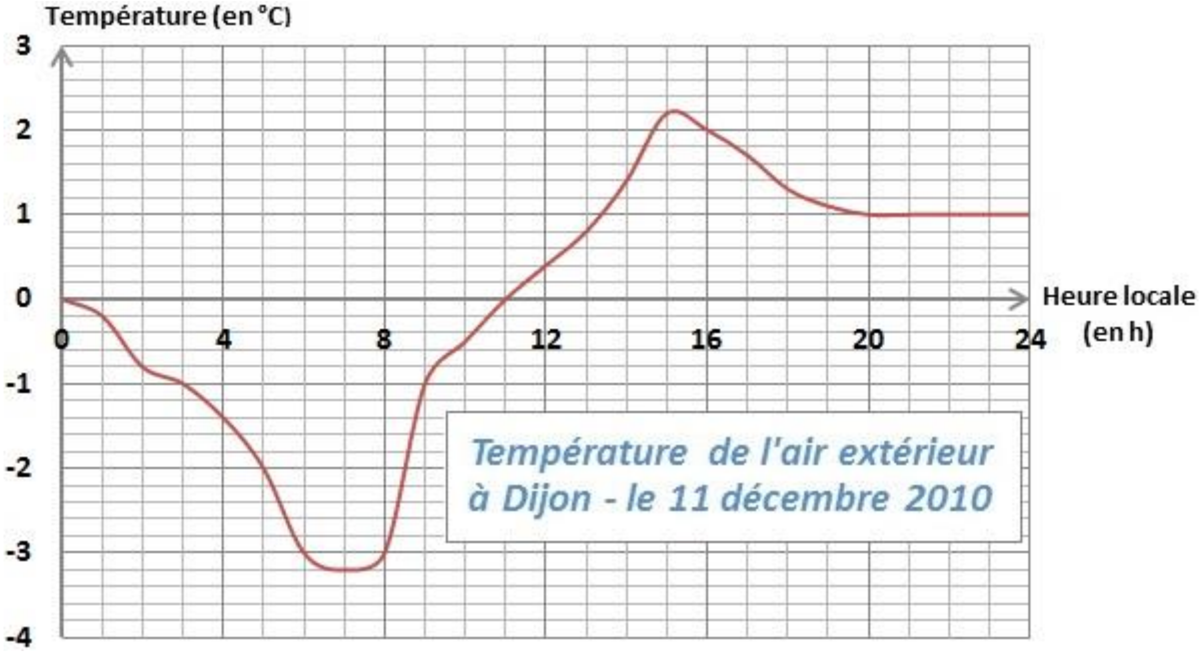
f] f(…) = -4

g] f(1,5) =

h] f(-2,5) =

i] Sachant que $f(x) = x^2 - 4$, vérifie si les valeurs trouvées sont des valeurs approchées ou des valeurs exactes.

5. *Croissance - Décroissance*



A partir du graphique ci-dessus, détermine :

a] Durant quels intervalles de la journée la température a-t-elle été croissante ?

b] Durant quels intervalles de la journée la température a-t-elle été décroissante ?

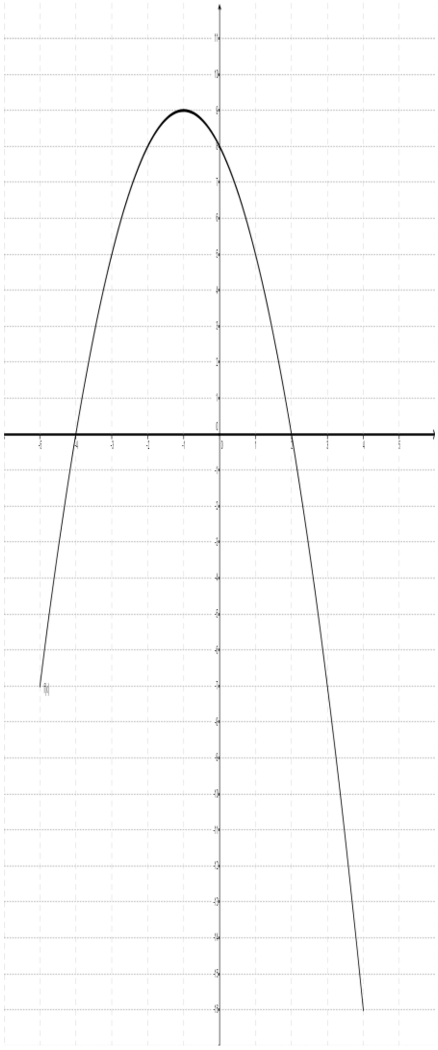
c] Durant quels intervalles de la journée la température a-t-elle été constante ?

d] Durant quels intervalles de la journée la croissance de température a-t-elle la plus forte ?

6. *Lecture à partir d'une fonction « hors contexte »*

APPLIQUER

A partir du graphique ci-dessous :



a] Détermine l'ensemble de définition de f(x) :

b] Détermine l'ensemble des images de f(x) :

c] Détermine les zéros de f(x) :

d] Détermine l'ordonnée à l'origine de f(x) :

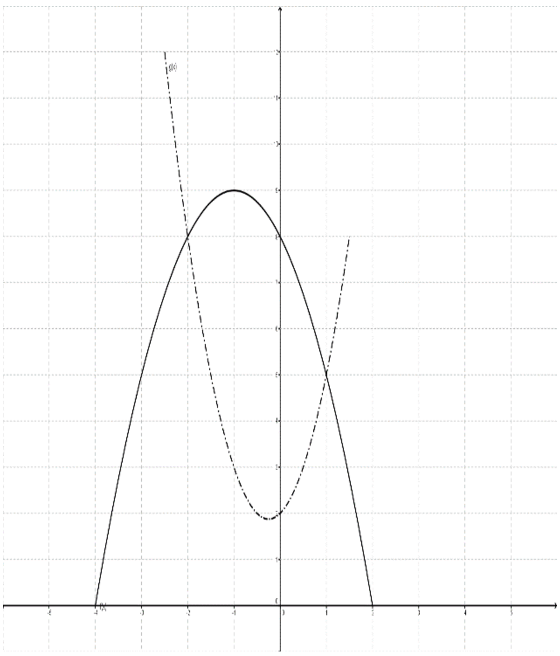
e] Pour quelle valeur de « x » la fonction admet-elle un maximum ? Quelles sont les coordonnées de ce maximum ?

f] Dans quel intervalle doit se situer « x » pour que f(x) ≥ 5

g] Pour quelle(s) valeur(s) de « x » a-t-on f(x) = 5

7. *« Au-dessus », « en-dessous »,…*

A partir du graphique, détermine les valeurs de « x » pour lesquelles :



g] f(x) = g(x)

h] f(x) > g(x)

i] f(x) < g(x)

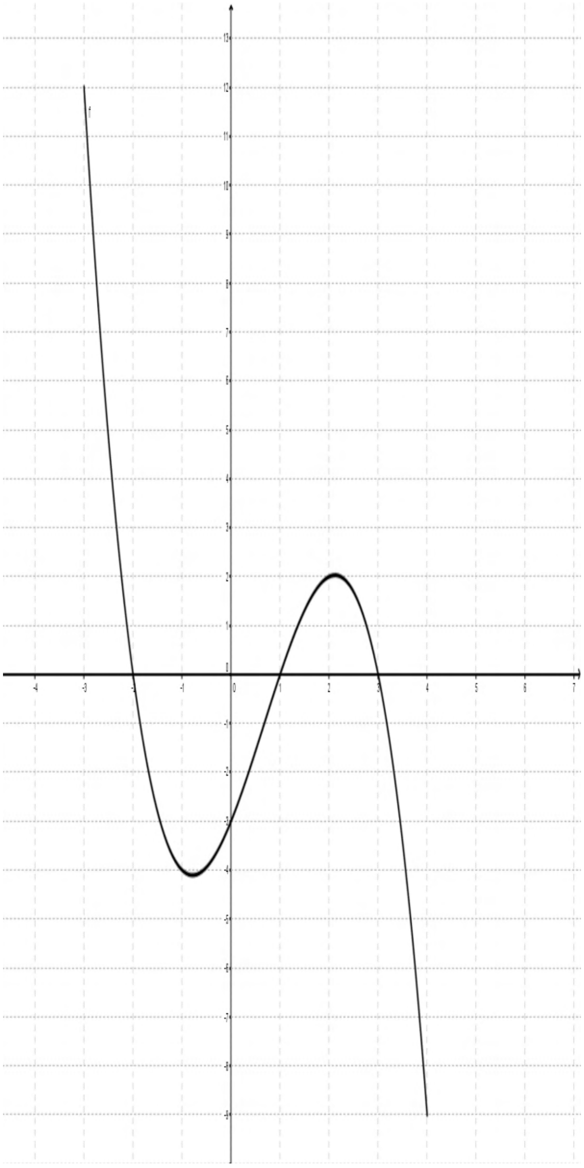
j] f(x) ≥ g(x)

k] f(x) ≤ g(x)

l] f(x) - g(x) = 6

8. *Equations et inéquations : résolution graphique*

A partir du graphique de la fonction f(x) ci-dessous :



a] Détermine son domaine de définition

b] Détermine son ensemble-images

c] Dresse son tableau de variation

d] Dresse son tableau de signes

e] Détermine ses zéros

f] Détermine les solutions des équations

f(x) = 4

f(x) = -1

f(x) = -3

g] Détermine les solutions de l'inéquation f(x) ≥ 1

TRANSFERER

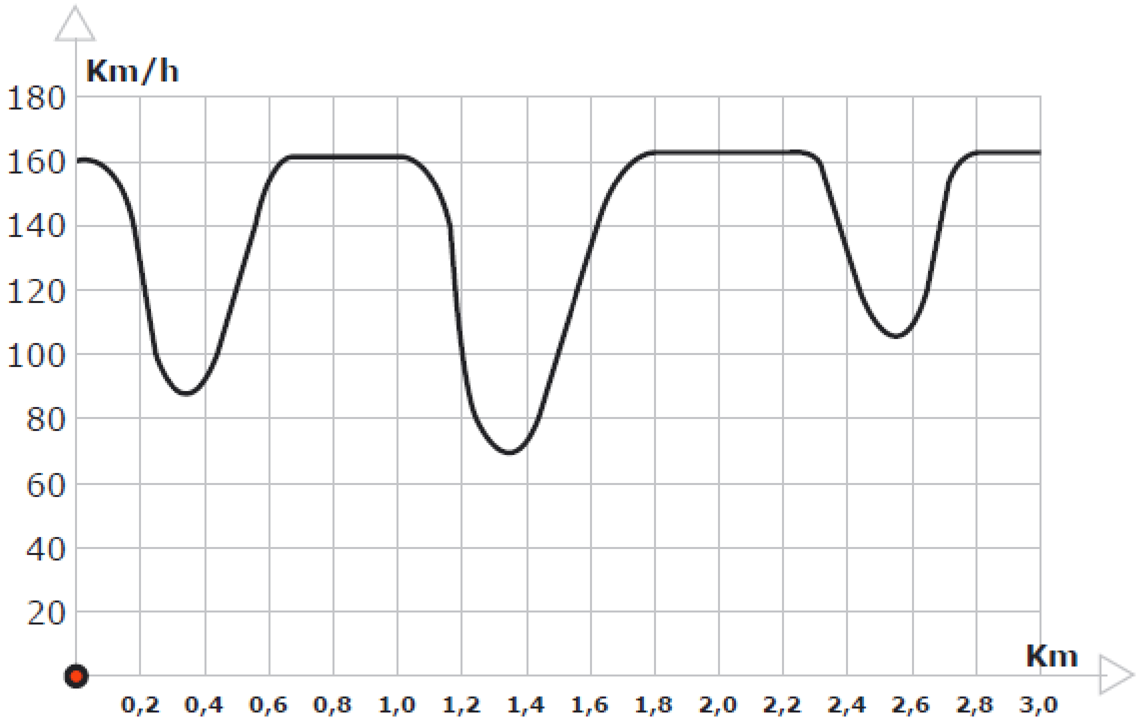
9. *A condition…*

Trace le graphique d'une fonction f(x) qui répond aux conditions suivantes :

- ***Domf*** = [-5 ; 1] ∪]3 ; 7]
- ***Imf*** = [-4 ; +∞]
- ***Zéros*** : x = -3 ; x = 1 et x = 4
- ***Ordonnée à l'origine*** : y = 2
- ***Croissante sur*** [-5 ; -3] et ***décroissante sur*** [-1 ; 1]
- ***Positive sur*** [5 ; 7]
- ***f(-1) = 1 et f(2) = -1***

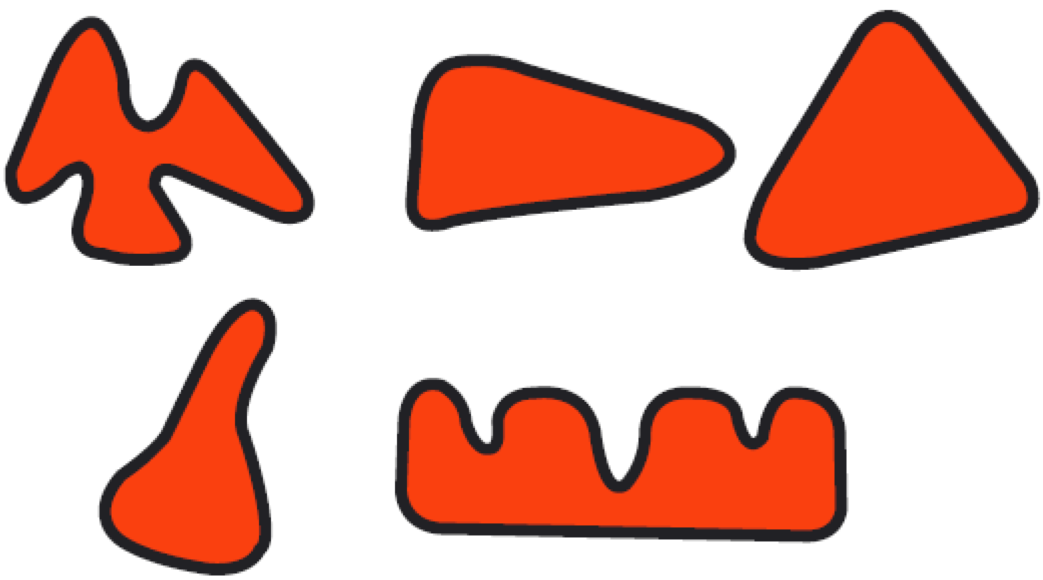
10. *Courbes et vitesses*[2]

Ce graphique est celui de la vitesse d'une voiture de course à plein régime lors de son 3ème tour de circuit.



Questions :

a] Sur quel circuit peut-elle être ?



b] Dans quel sens tourne-t-elle ?

c] Ou se trouve la ligne de départ

[2] Unesco – Centre•Sciences - Adecum - www.experiencingmaths.org