Collège Saint-Barthélemy
Y. Michiels

Mathématique – Quatrième année

FASCICULE 1

Cercle trigonométrique
Trigonométrie du triangle quelconque

OBJECTIFS – UAA3 : Trigonométrie

Connaitre

- Représenter sur un cercle trigonométrique un point correspondant à un angle ainsi que ses nombres trigonométriques.
- Établir le lien entre triangles semblables et nombres trigonométriques.
- Interpréter géométriquement les relations principales.

Appliquer

- Calculer l'amplitude d'un angle avec calculatrice.
- Calculer la longueur d'un côté d'un triangle avec calculatrice.
- Calculer l'aire d'un triangle avec calculatrice.

Transférer

- Utiliser les relations trigonométriques pour traiter une application géométrique, topographique, physique, …
- Calculer une distance inaccessible dans le plan ou dans l'espace.

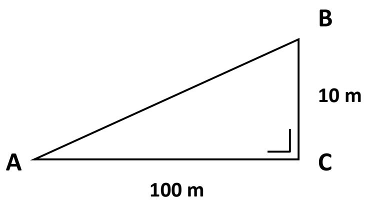
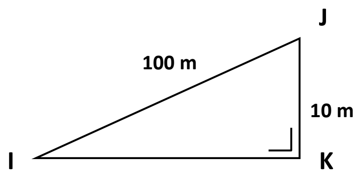
EXPLORATION : Trigonométrie du triangle rectangle (3e année)

Activité 1 : **Inclinaison ou pente**

Deux théories s'affrontent face à ce panneau qui signifie que sur une distance de 100m, la route s'élève de 10m :

- certains disent que il faut avancer horizontalement d'une distance de 100m et monter verticalement de 10m ;
- d'autres affirment qu'il faut parcourir les 100m sur la route pour se retrouver 10m plus haut.

Voici les schémas décrivant ces deux manières de voir les choses :

Méthode 1 - Pente	Méthode 2 - Inclinaison
	

Quelle est la route la plus inclinée ? (Que signifie la plus inclinée ?) Explique par un calcul.

Activité 2 : **Ombre et projection orthogonale**

Prends un crayon et place-le de façon à ce que son ombre au sol fasse $\frac{3}{4}$ de sa longueur. Mesure l'angle que le crayon fait avec l'horizontale. Recommence avec un pic de « brochette », un manche de ballet,… Que constates-tu ?

Activité 3 : Des triangles semblables

Représente schématiquement et à l'échelle (que tu choisis) toutes les situations suivantes sur du papier transparent. Essaie ensuite de les grouper en fonction de la pente qu'elles décrivent. Vérifie à l'aide des transparents.

1] Sur 50 m de sentier rectiligne, la dénivellation est de 10 m.

2] Dans un repère cartésien, on donne les points X (-1 ; -1) ; Y (3 ; 2) et Z (3 ; -1). Quelle est la pente de la droite XY ?

3] Cette droite fait un angle de 11,5° avec l'horizontale.

4] La voiture de M.Michiels munie de pneus à clous a gravi une route faisant 30° avec l'horizontale.

5] Les côtés de l'angle droit d'un triangle mesurent 3 cm et 2,25 cm.

6] Une planche de 7,5 m posée sur un mur fait une ombre de 6 m au sol quand le soleil est à la verticale.

7] Si je me déplace de 866 m horizontalement, je m'élève de 500 m verticalement.

8] Dans un triangle rectangle, un des côtés de l'angle droit mesure 1,5 cm alors que l'hypoténuse vaut 7,5 cm.

9] Une côte très dure du Tour de France VTT a une longueur de 1,25 km et passe de 1250 m à 1500 m d'altitude.

10] Le versant d'un toit mesure 12,5 m et s'élève d'une hauteur de 6,25 m par rapport au mur sur lequel il repose.

11] Dans un repère cartésien, on donne les points A (2 ; 1) ; B (4 ; $\frac{5}{2}$) et C (4 ; 1). Quelle est la pente de la droite AB ?

Activité 4 : Pente et angles

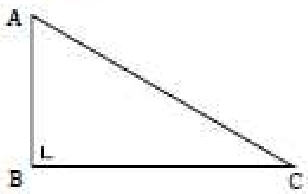
Représente une pente « mathématique » de 10%, 20%, 30%, 40%,… A quels angles correspondent de telles pentes ? Mesure et calcule.

<u>Activité 5 :</u> <u>Opposé – Adjacent – Hypoténuse[1]</u>

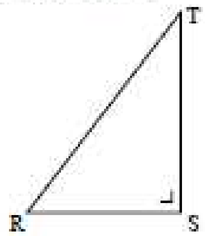
ENTOURE, dans la liste suivante, les mots qui te semblent être synonymes du terme « Opposé ».		ENTOURE, dans la liste suivante, les mots qui te semblent être synonymes du terme « Adjacent ».	
Vis-à-vis	Contigu	Avoisinant	À côté de
Attenant	Inverse	À l'écart	Proche
Identique	Contraire	Attenant	Distant
Voisin	Côte à côte	Voisin	Côte à côte
Collé	En contact	Collé	En contact
Proche	Éloigné	Contigu	Éloigné

Dans les triangles rectangles suivants, **DÉTERMINE** le côté opposé à

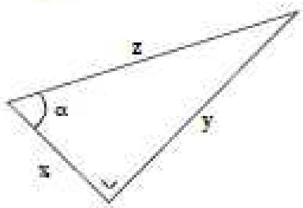
l'angle $\hat{A}$:



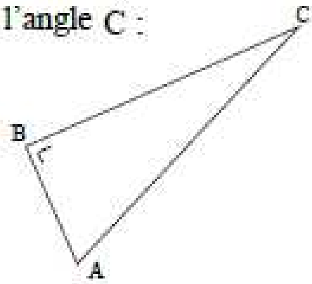
l'angle $\widehat{RTS}$:



l'angle α :

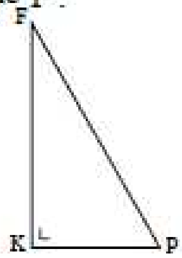


l'angle $\hat{C}$:

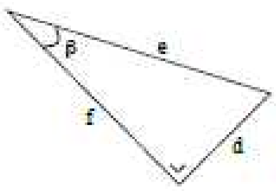


Dans les triangles rectangles suivants, **DÉTERMINE** le côté adjacent à

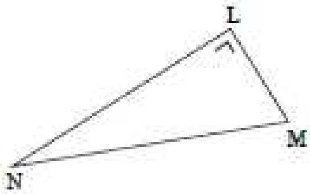
l'angle $\hat{P}$:



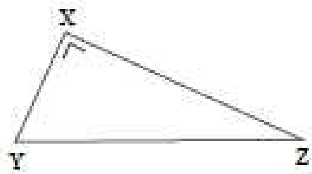
l'angle β :



l'angle $\widehat{LMN}$:



l'angle $\hat{Z}$:

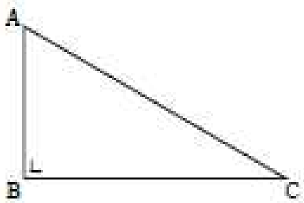


Dans les triangles rectangles suivants, **DÉTERMINE**

l'hypoténuse :

le côté opposé à $\hat{C}$:

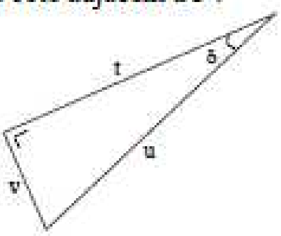
le côté adjacent à $\hat{C}$:



l'hypoténuse :

le côté opposé à δ :

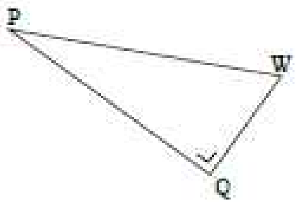
le côté adjacent à δ :



l'hypoténuse :

le côté opposé à $\hat{W}$:

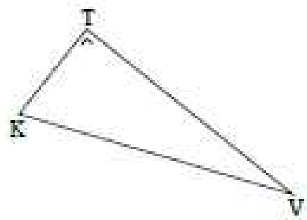
le côté adjacent à $\hat{W}$:



l'hypoténuse :

le côté opposé à $\widehat{TVK}$:

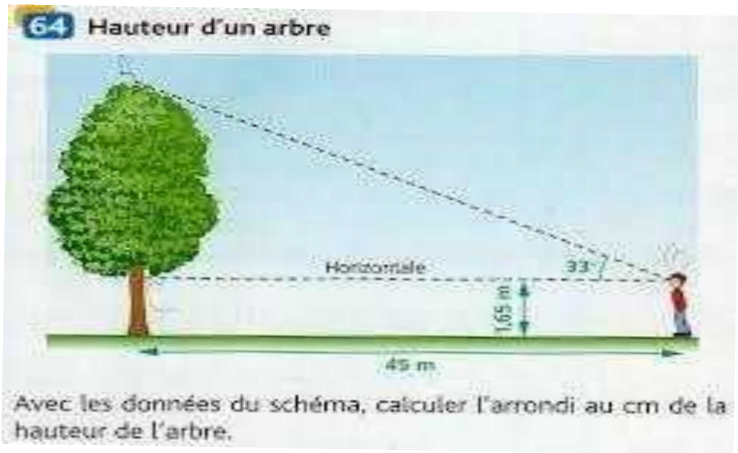
le côté adjacent à $\widehat{TVK}$:



[1] Evaluation non certificative – 2014 – Pistes didactiques – Fédération WB : Enseignement.be

Activité 6 : **Hauteur d'un arbre**

Avec les données du schéma, calcule la hauteur de l'arbre.



Activité 7 : **Cerf-volant**

A quelle hauteur se situe un cerf-volant tenu par un enfant mesurant 1m60 (hauteur de la main qui tient la ficelle) si la ficelle qui le retient mesure 32m et qu'elle forme un angle de 70° avec le sol (horizontal).

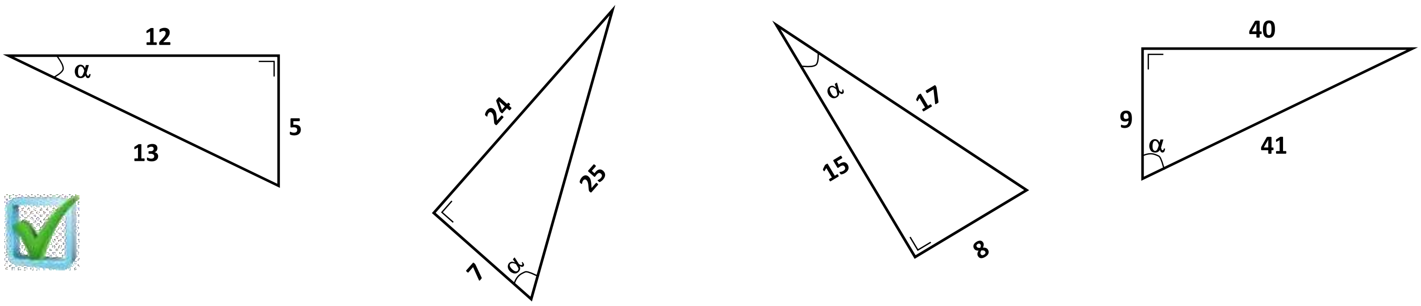
Activité 8 : **Calcul d'angle**

Sachant que le cosinus de l'angle α est de $\frac{5}{6}$, ***construis*** l'angle α. ***Mesure*** ensuite cet angle et vérifie à l'aide de la calculette la précision de ton dessin en ***calculant*** l'amplitude de α.

Activité 9 : Isole « x » dans les situations suivantes :

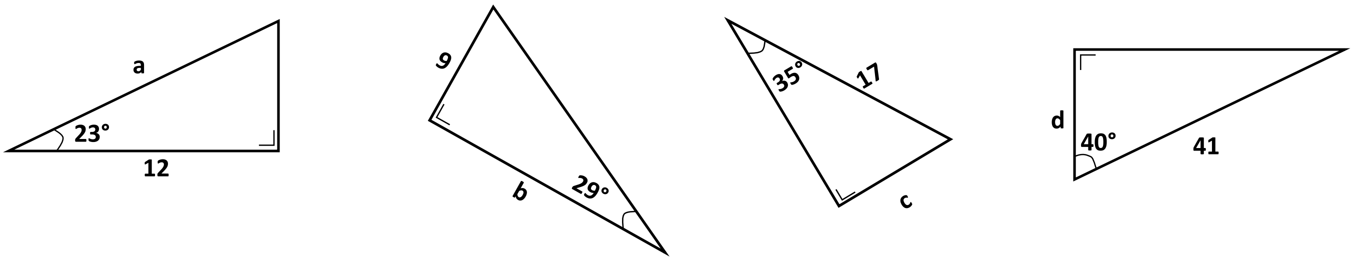
a.x = b	$\frac{x}{a} = b$ (a ≠ 0)	$\frac{a}{x} = b$ (x ≠ 0)

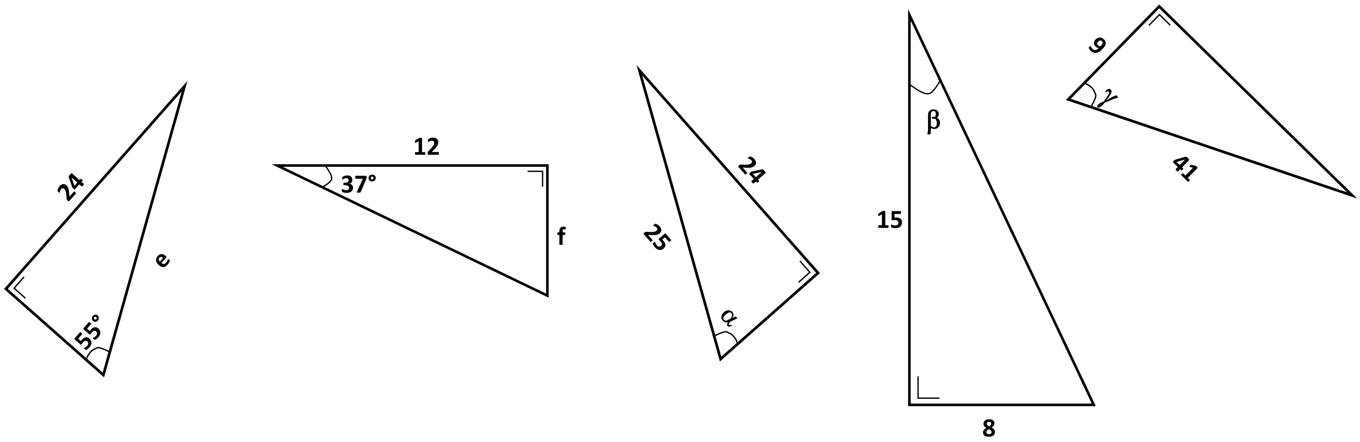
Activité 10 : Ecris sous forme de fractions les valeurs de sinα, cosα et tanα.



sinα =	sinα =	sinα =	sinα =
cosα =	cosα =	cosα =	cosα =
tanα =	tanα =	tanα =	tanα =

<u>Activité 11 :</u> Calcule la longueur des côtés (au millimètre près) ou l'amplitude de l'angle (en ° ' ") représentés par une lettre.





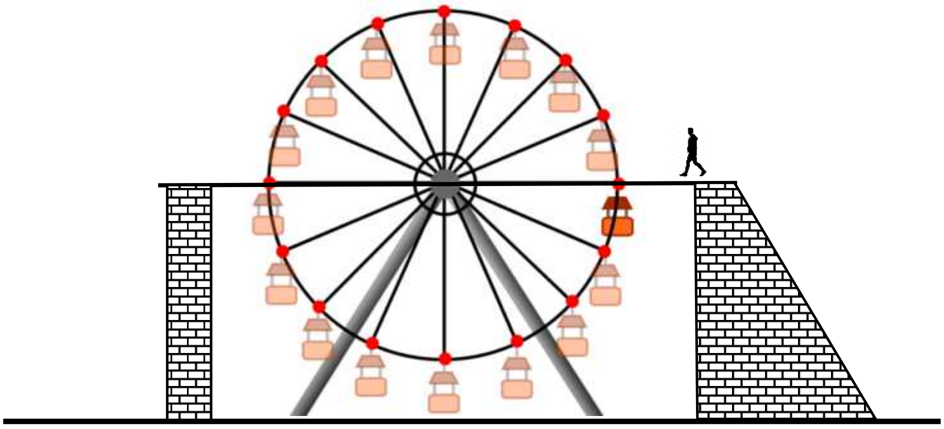
<u>Activité 12 :</u> Calcule l'amplitude de l'angle γ, angle aigu d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 9 cm et le côté adjacent à cet angle 7 cm.

<u>Activité 13 :</u> A quel pourcentage correspond une pente de 45° ? Et une pente de 30° (**<u>Aide</u>** : pense aux triangles équilatéraux) ? De 60° ?

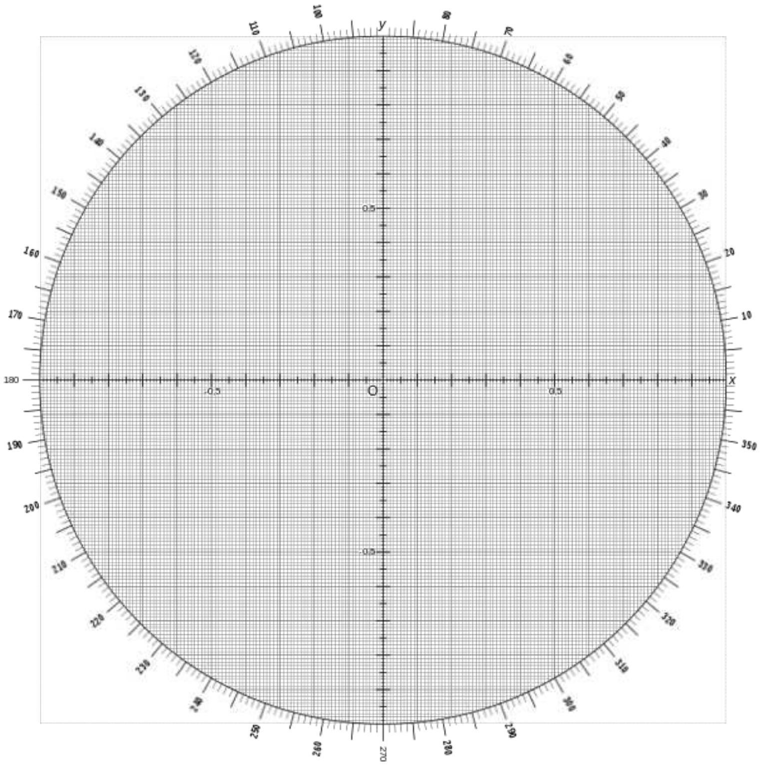
EXPLORATION : Cercle trigonométrique et trigonométrie du triangle quelconque

Activité 1 : **La grande roue**

Une passerelle permet d'atteindre les nacelles d'une grande roue de 1 dam de rayon qui tourne dans le sens anti-horloger (mathématique). Une personne prend place dans une des nacelles.

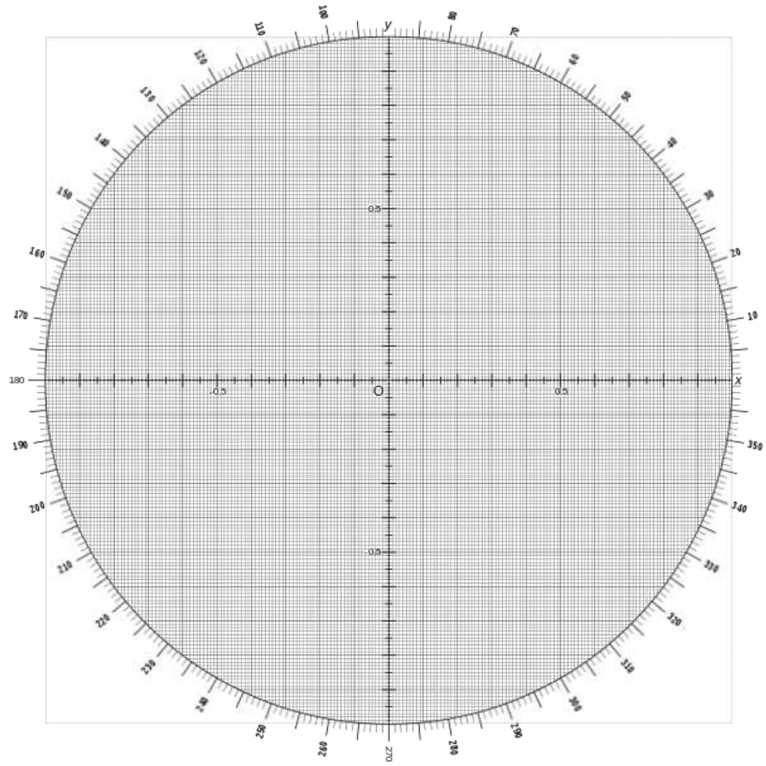


1] A quelles hauteur se situe t'elle par rapport à la passerelle après avoir tourné d'un angle de 30° - 45° - 60° - 90° - 120° - 135° - 150° - 180° ? Utilise le cercle ci-dessous pour représenter les différentes situations puis complète le tableau qui suit.



Angle formé avec la passerelle	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Hauteur par rapport à la passerelle									

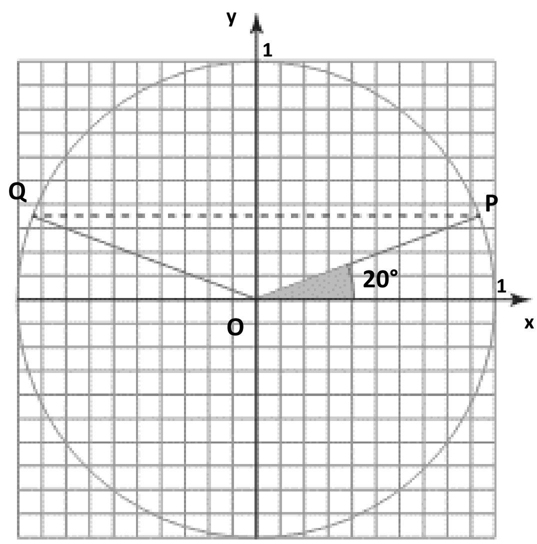
2] A chaque angle de rotation, la personne lâche un objet qui tombe à la verticale sur la passerelle. A quelle distance du centre de la roue rebondit cet objet ? Utilise le cercle ci-dessous pour représenter les différentes situations puis complète le tableau qui suit.



Angle formé avec la passerelle	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Distance par rapport au centre de la roue									
Position par rapport au centre de la roue (gauche-droite)									

Activité 2 : Sinus, cosinus et tangente d'un angle compris entre 0° et 180°

1] Entoure la bonne réponse :



- Abscisse de P =

sin 20° *-sin 20°* *cos 20°* *-cos 20°*

- Ordonnée de P =

sin 20° *-sin 20°* *cos 20°* *-cos 20°*

- Abscisse de Q =

sin 20° *-sin 20°* *cos 20°* *-cos 20°*

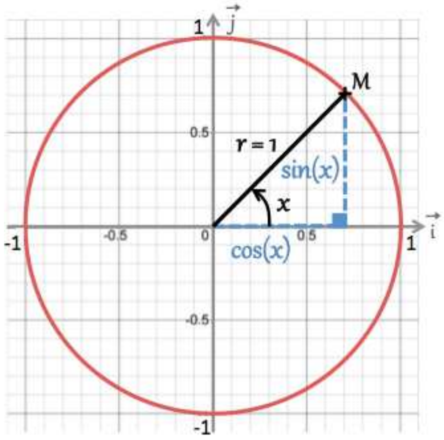
- Ordonnée de Q =

sin 20° *-sin 20°* *cos 20°* *-cos 20°*

2] A partir du même cercle, complète par « = » ou « ≠ » :

- sin 160° … sin 20°
- sin 160° … -sin 20°
- cos 160° … cos 20°
- Cos 160° … -cos 20°

3] Dans ce cercle, tu viens de constater que le ***sinus*** d'un angle aigu est ***l'ordonnée*** d'un point de ce cercle et que le ***cosinus*** est ***l'abscisse*** de ce point. Qu'en est-il alors de la tangente d'un angle compris entre 0° et 180° ? *(Pour rappel, une droite est tangente à un cercle si elle le coupe en un seul point. Elle est perpendiculaire au rayon en ce point)*



4] <u>Dans chaque quadrant</u>

a) Construis un cercle de 5 cm de rayon. Places-y un angle de 40° et représente :
- En rouge son cosinus ;
- En vert son sinus ;
- En bleu sa tangente

Complète ensuite le tableau ci-dessous :

	Sin 40°	**Cos 40°**	**Tan 40°**
Réponses **<u>mesurées</u>**			
Réponses **<u>calculées</u>** (2 décimales)			

b) Construis un cercle de 5 cm de rayon. Places-y un angle de 160° et représente :
- En rouge son cosinus ;
- En vert son sinus ;
- En bleu sa tangente

Complète ensuite le tableau ci-dessous :

	Sin 160°	**Cos 160°**	**Tan 160°**
Réponses **<u>mesurées</u>**			
Réponses **<u>calculées</u>** (2 décimales)			

c) Construis un cercle de 5 cm de rayon. Places-y un angle de 200° et représente :
- En rouge son cosinus ;
- En vert son sinus ;
- En bleu sa tangente

Complète ensuite le tableau ci-dessous :

	Sin 200°	**Cos 200°**	**Tan 200°**
Réponses **<u>mesurées</u>**			
Réponses **<u>calculées</u>** (2 décimales)			

d) Construis un cercle de 5 cm de rayon. Places-y un angle de 310° et représente :

- En rouge son cosinus ;
- En vert son sinus ;
- En bleu sa tangente

Complète ensuite le tableau ci-dessous :

	Sin 310°	**Cos 310°**	**Tan 310°**
Réponses **mesurées**			
Réponses **calculées** (2 décimales)			

Activité 3 : La règle des sinus

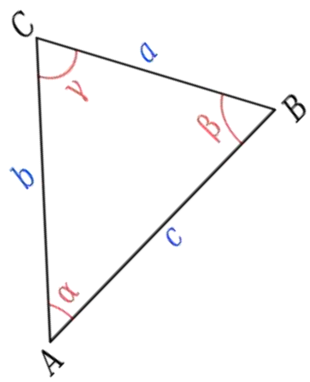
1] Pour construire un « Death-Ride » entre deux arbres A et C situés de part et d'autre d'une rivière, une société doit déterminer la distance qui les sépare.

Ils font appel à un géomètre qui prend les mesures suivantes et affirme qu'elles sont suffisantes pour déterminer la distance entre A et C :

$\alpha = 37°$; $\beta = 72°$ et b = 38 m (voir schéma ci-contre)

Le géomètre a-t-il raison ? Explique et justifie par des calculs.

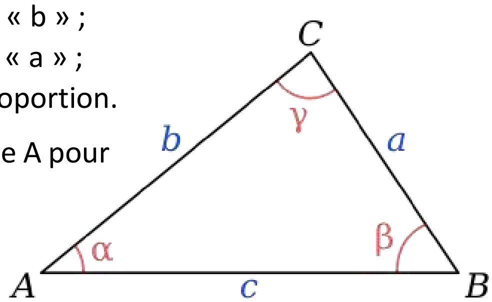
(Quand un triangle n'est pas rectangle, les rapports des sin, cos et tan ne peuvent être appliqués. Indice : trace la hauteur issue de C) :



2] Pour établir la formule générale, suis la procédure suivante :

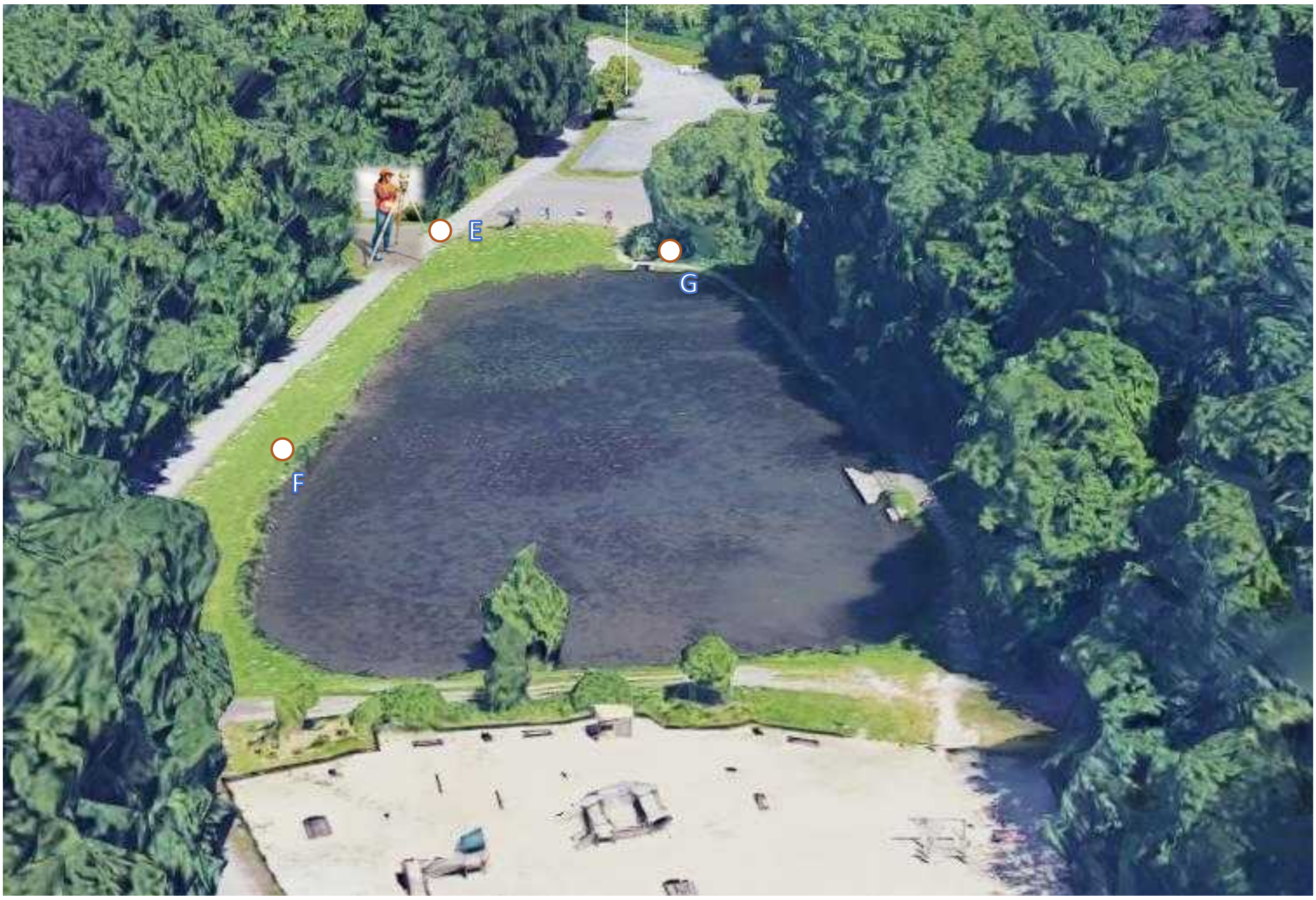
- trace la hauteur issue de C qui coupe [AB] en H et nomme sa longueur « h » ;
- dans le triangle rectangle CAH, exprime « h » en fonction de « b » ;
- dans le triangle rectangle CBH, exprime « h » en fonction de « a » ;
- égale ces deux valeurs et transforme cette égalité en une proportion.

Reproduis la même démarche en traçant la hauteur « h' » issue de A pour trouver une relation entre b, c, β et γ



Activité 4 : La règle des cosinus (ou théorème d'Al Kashi)

1] On veut construire une passerelle pour les pêcheurs sur un des étangs de la Julienne entre F et le petit pont situé en G.



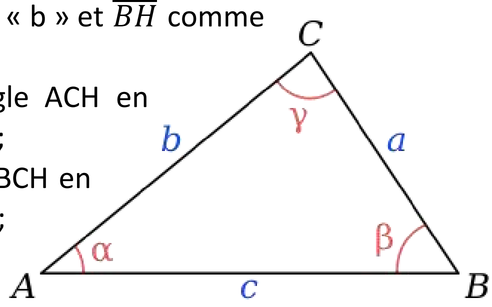
Un géomètre vient t'expliquer comment procéder :

- Planter deux bâtons, l'un en F et l'autre en G
- Du point E, il mesure l'angle horizontal FÊG ainsi que les distances horizontales $\overline{EF}$ et $\overline{EG}$

Sachant que FÊG mesure 82°, que $\overline{EF}$ = 32 m et que $\overline{EG}$ = 24 m, calcule la longueur de la passerelle.

2] Pour établir la formule générale, suis la procédure suivante :

- trace la hauteur issue de C qui coupe [AB] en H et nomme sa longueur « h » ;
- dans le triangle rectangle CAH, exprime $\overline{AH}$ en fonction de « b » et $\overline{BH}$ comme étant : $\overline{AB}$ - $\overline{AH}$
- Écrire la relation de Pythagore entre les côtés du triangle ACH en utilisant la valeur de $\overline{AH}$ trouvée ci-dessus puis isoler « h² » ;
- Écrire la relation de Pythagore entre les côtés du triangle BCH en utilisant la valeur de $\overline{BH}$ trouvée ci-dessus puis isoler « h² » ;
- égale ces deux valeurs et isoler « a² ».



Activité 5 : Calculs d'aires de triangles

Etablis la formule qui te permet de calculer l'aire d'un triangle à partir de deux de ses côtés et de l'angle compris entre ses deux côtés. (Exemple : les données connues sont « a », « b » et « γ »)

SYNTHÈSE : TRIGONOMETRIE

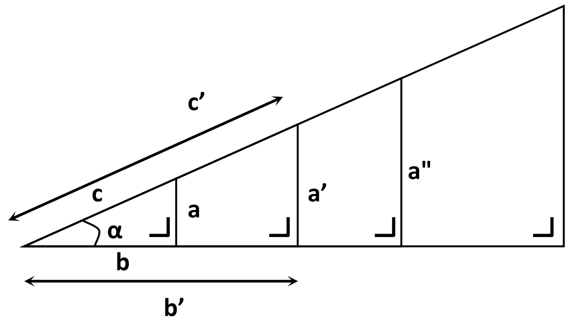
1. INTRODUCTION

Les Grecs ont développé la trigonométrie en établissant des tables de mesures de cordes et d'angles dans un cercle de référence appelé **<u>cercle trigonométrique.</u>** Eratosthène et Aristote (250 ACN) les ont utilisées pour évaluer la circonférence de la Terre, la distance Terre-Lune et la distance Terre-Soleil.
En troisième année, tu as défini les nombres trigonométriques (sinus, cosinus et tangente) comme des rapports de longueurs dans le triangle rectangle. Les angles étaient donc toujours positifs et aigus.
Dans ce chapitre, ces notions vont être étendue à d'autres angles (supérieur à 90°, négatifs,…) grâce au cercle trigonométrique dans un repère.
Des formules qui permettent de calculer des mesures de distances et d'angles dans les triangles quelconques seront établies à partir de celles que tu as étudiées à propos du triangle rectangle : la règle des sinus et le théorème d'Al Kashi (règle des cosinus). Elles sont très utiles dans différents domaines ; en particulier pour les géomètres.

2. RAPPELS

2.1. Triangles rectangles semblables

Tous les triangles rectangles qui ont un angle aigu de même amplitude sont semblables puisqu'ils ont deux angles respectivement de même amplitude (voir triangles semblables).
Nous pouvons donc les disposer comme dans la figure ci-dessous :
Comme les *triangles sont semblables*, des égalités de rapports peuvent être déduites.



2.2. Nombres trigonométriques d'un angle aigu

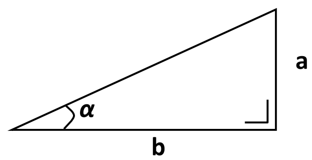
Reprenons les égalités de rapport une à une :

2.2.1. Tangente d'un angle aigu

Les rapports de la longueur du côté opposé à l'angle aigu ***α*** à la longueur du côté adjacent à cet angle est le même pour tous les triangles rectangles semblables. Il est indépendant de leur taille et ne varie qu'en fonction de l'amplitude de l'angle aigu.

Nous appellerons ce rapport « ***la tangente de l'angle aigu*** » et nous le noterons par le symbole ***Tan α***

$$\boxed{\text{Tan}\,\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{a}{b}}$$



Ce rapport permet de calculer des hauteurs inaccessibles à partir de mesures horizontales ; il donne aussi le **coefficient de forme des rectangles** semblables formés à partir de ces triangles rectangles.

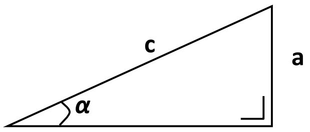
Ce rapport correspond aussi à la **pente du segment de droite [AB]** quand le segment de droite [AC] est horizontal.

2.2.2. *Sinus d'un angle aigu*

Les rapports de la longueur du côté opposé à l'angle aigu ***α*** à la longueur de l'hypoténuse est le même pour tous les triangles rectangles semblables. Il est indépendant de leur taille et ne varie qu'en fonction de l'amplitude de l'angle aigu.

Nous appellerons ce rapport « ***le sinus de l'angle aigu*** » et nous le noterons par le symbole ***Sin α***

$$\boxed{\text{Sin}\,\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{a}{c}}$$

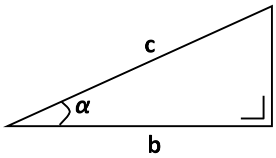


2.2.3. *Cosinus d'un angle aigu*

Les rapports de la longueur du côté adjacent à l'angle aigu ***α*** à la longueur de l'hypoténuse est le même pour tous les triangles rectangles semblables. Il est indépendant de leur taille et ne varie qu'en fonction de l'amplitude de l'angle aigu.

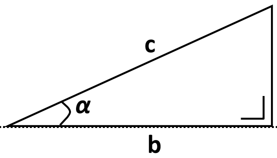
Nous appellerons ce rapport « ***le cosinus de l'angle aigu*** » et nous le noterons par le symbole ***Cos α***

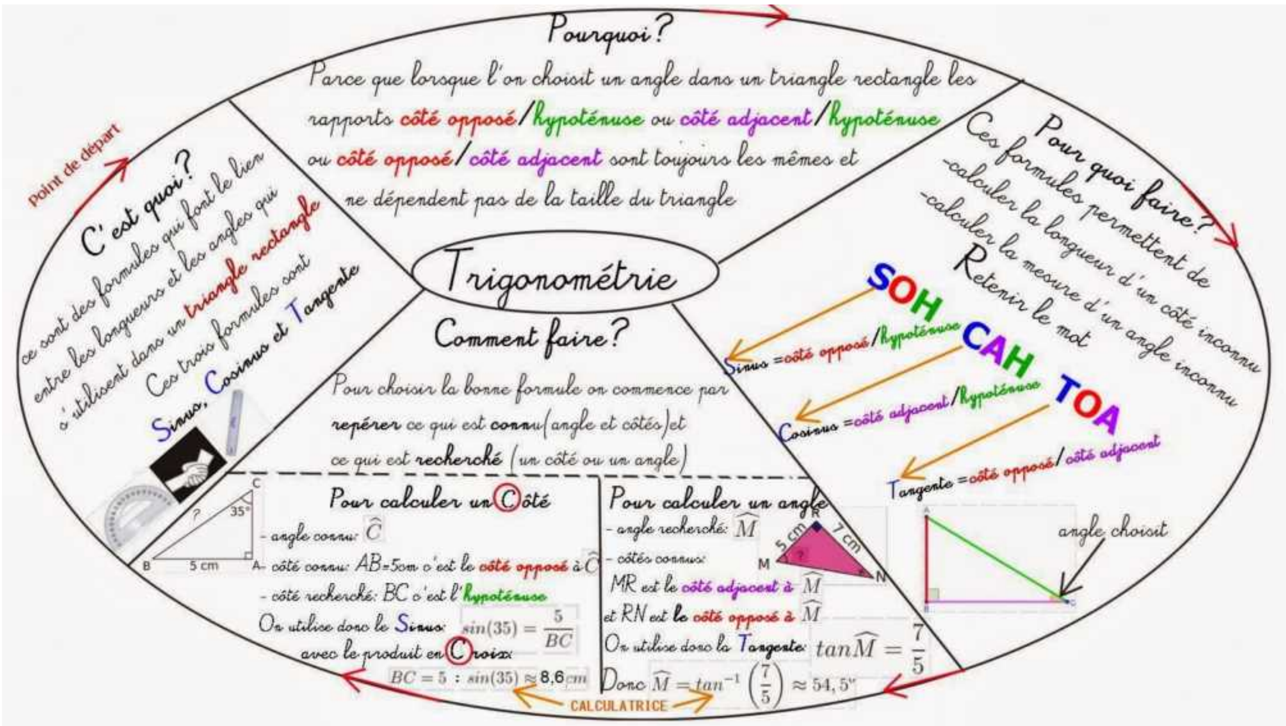
$$\boxed{\text{Cos}\,\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{b}{c}}$$



Le cosinus d'un angle aigu permet de trouver **la longueur de la projection orthogonale d'un segment sur une direction donnée** :

b = c.cos *α*

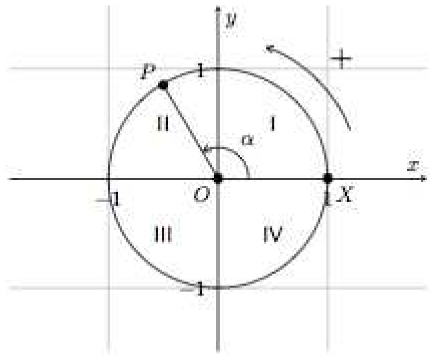




3. CERCLE TRIGONOMETRIQUE

En troisième année, les nombres trigonométriques ont été définis dans le triangle rectangle avec des angles aigus.
Pour étendre ces définitions à d'autres angles, l'utilisation du **cercle trigonométrique** est indispensable.

3.1. Définition



Considérons un cercle de rayon égal à une unité et de centre « O », origine d'un repère orthonormé et orientons le dans le sens mathématique (anti-horloger). Les axes du repère divisent le cercle en quatre quadrants numérotés de I à IV.

Appelons X le point de coordonnée (1 ; 0) et P un point quelconque de ce cercle : ils déterminent un angle unique $\widehat{XOP}$ orienté dans le sens anti-horloger d'amplitude comprise entre 0° et 360°. Soit α cette amplitude.

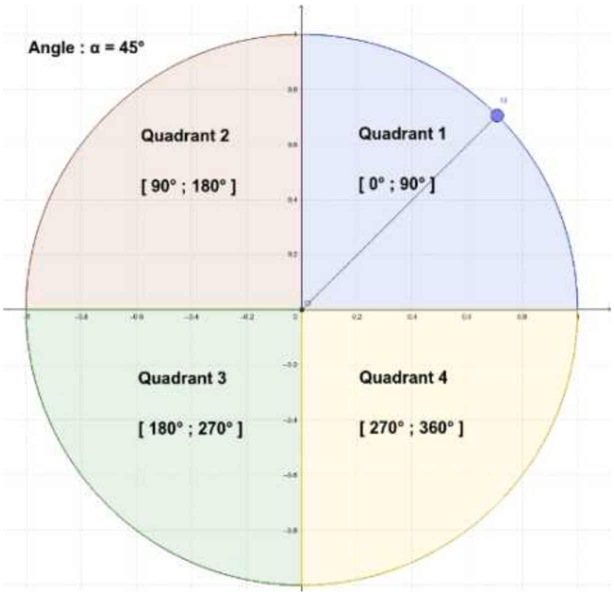
Ainsi, à chaque point P du cercle correspond un angle $\widehat{XOP}$ et vice-versa.

Un cercle trigonométrique est un cercle centré à l'origine, orienté dans le sens anti-horloger et de rayon 1

Dans un cercle trigonométrique, la demi-droite [OX est toujours le premier côté de l'angle orienté dont on veut déterminer les nombres trigonométriques.

3.2. Propriétés

1) Le cercle trigonométrique est divisé en quatre quadrants numérotés dans le sens positif.



- le premier quadrant (Q1) comprend les angles dont une mesure est comprise entre …………………….. degrés.
- le second quadrant (Q2) comprend les angles dont une mesure est comprise entre …………………….. degrés.
- le troisième quadrant (Q3) comprend les angles dont une mesure est comprise entre …………………….. degrés.
- le quatrième quadrant (Q4) comprend les angles dont une mesure est comprise entre …………………….. degrés.

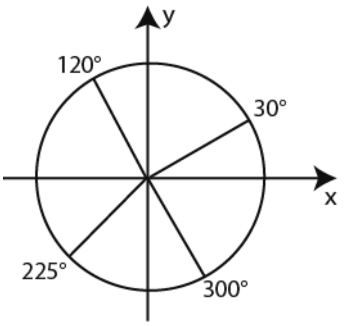
Exemples : 30° est un angle du …... quadrant.

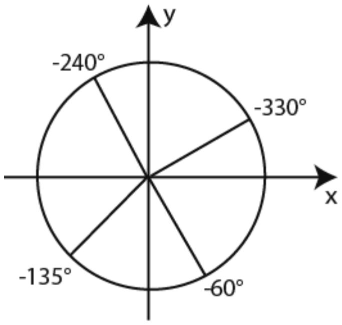
279° est un angle du ..… quadrant.

500° est un angle du …… quadrant.

2) Á chaque angle correspond un et un seul point du cercle. Á chaque point du cercle correspond un et un seul angle.

Exemples : angles orientés positifs angles orientés négatifs



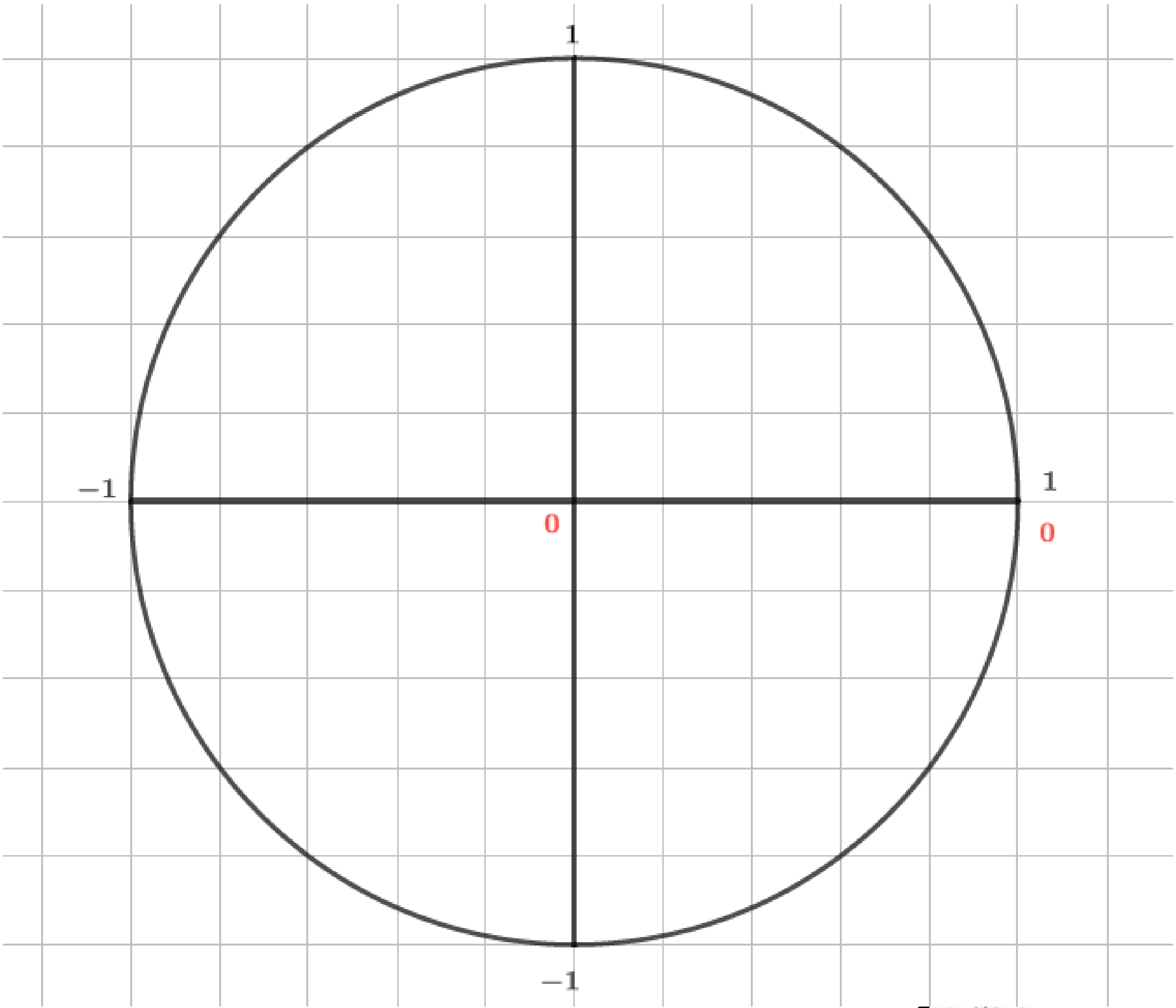


3.3. Exercice

Exercice 1

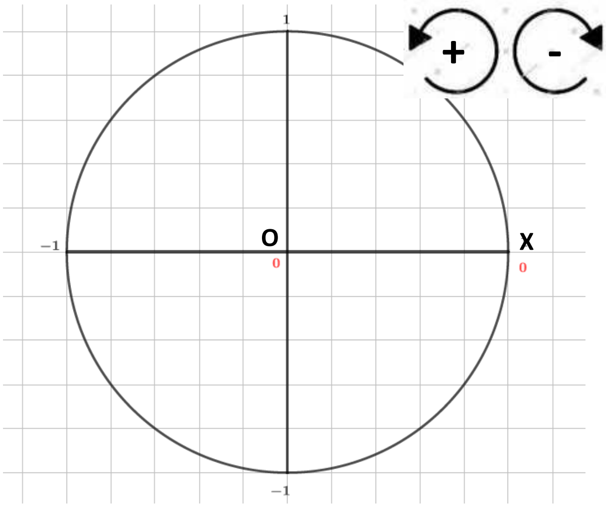
Sur un cercle trigonométrique, représente les points correspondants aux angles dont les amplitudes sont les suivantes.

A : $315°$	B : $210°$	C : $135°$	D : $-120°$
E : $320°$	F : $-75°$	G : $-180°$	H : $50°$
I : $121°$	J : $245°$	K : $589°$	L : $-450°$



4. ANGLES ORIENTES

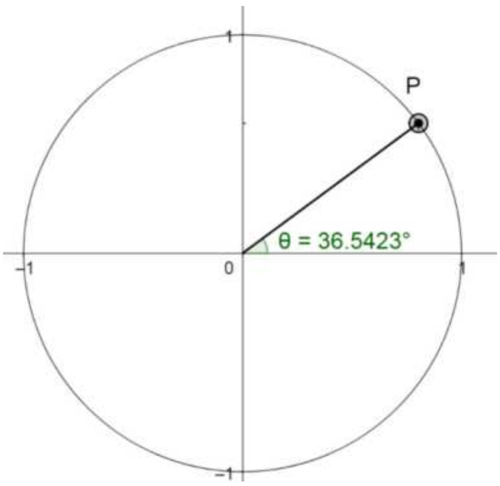
Pour déterminer un **angle orienté** dans un cercle trigonométrique, on trace une demi-droite issue de O et faisant un angle θ avec l'axe horizontal du repère. Notons P son point d'intersection avec le cercle.



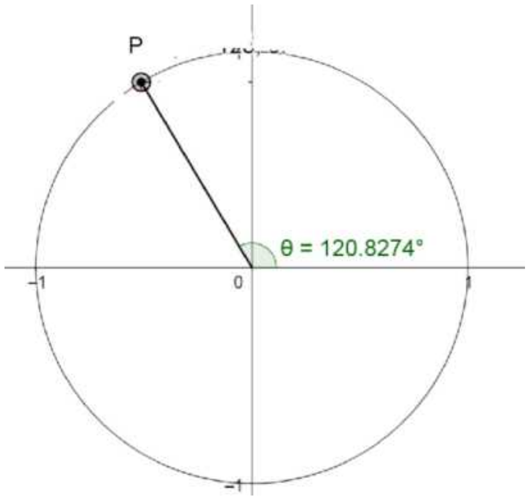
En considérant que [OX est le premier côté de l'angle θ et que [OP est le deuxième, on détermine ainsi un angle orienté XÔP. Tout comme pour les rotations, le sens positif est le sens contraire des aiguilles d'une montre et le sens négatif l'autre sens.

https://www.geogebra.org/m/wRtHvYau#material/DQHhj9wQ

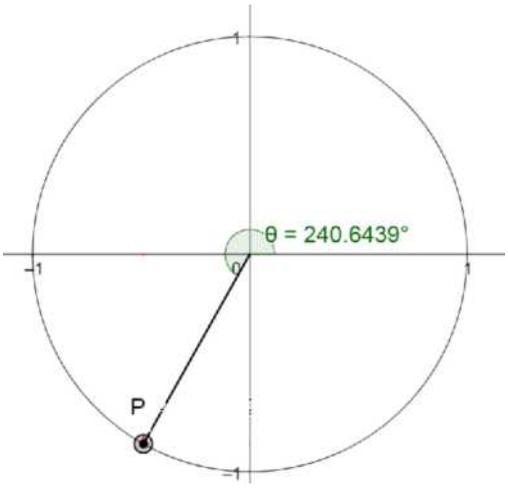
Exemple quadrant 1



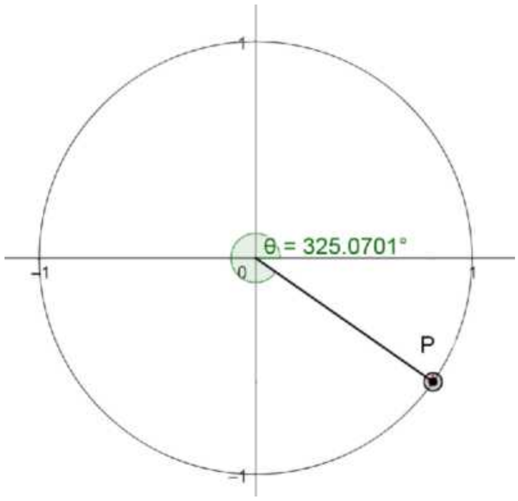
Exemple quadrant 2



Exemple quadrant 3



Exemple quadrant 4



5. NOMBRES TRIGONOMETRIQUES D'ANGLES ORIENTES COMPRIS ENTRE 0° ET 180°

5.1. Sinus et cosinus d'un angle orienté

Soit M le point du cercle trigonométrique représentant un angle x du premier quadrant (angle aigu) et soit B sa projection orthogonale sur l'axe des abscisses.

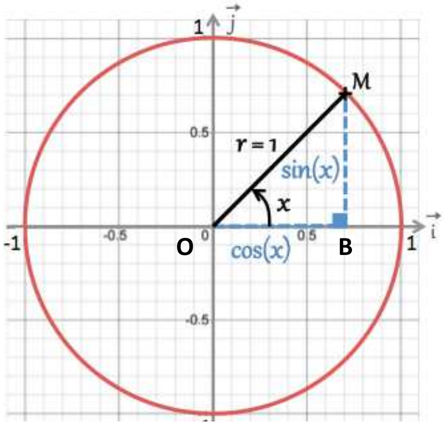


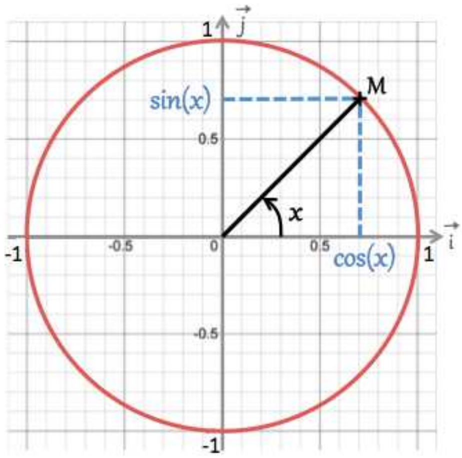
Figure 1

Dans le triangle rectangle OBM, nous avons :

$$Sin\ x = \frac{\overline{BM}}{\overline{OM}} = \overline{BM} \text{ car } \overline{OM} = 1$$

$$Cos\ x = \frac{\overline{OB}}{\overline{OM}} = \overline{OB} \text{ car } \overline{OM} = 1$$

Partant de ce résultat acquis pour un angle du premier quadrant, généralisons les notions de cosinus et de sinus à tout angle en adoptant les définitions suivantes :



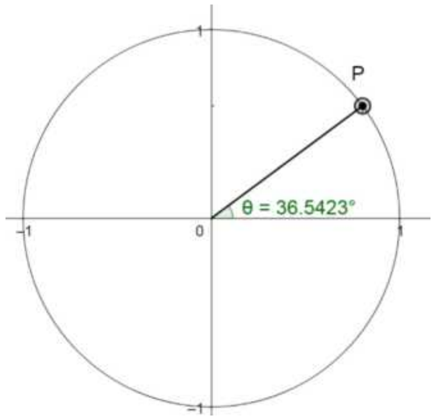
Définition du sinus d'un angle orienté :

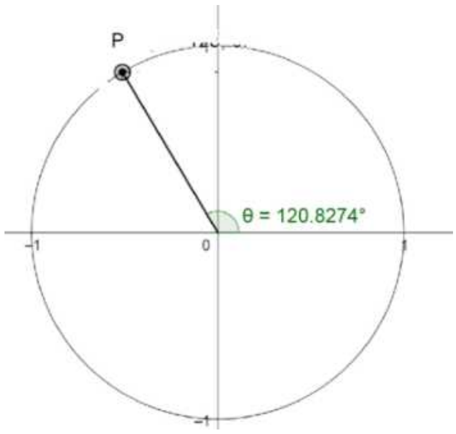
> **Le sinus d'un angle α rapporté au cercle trigonométrique est l'ordonnée du point M représentant l'angle α sur le cercle trigonométrique.**

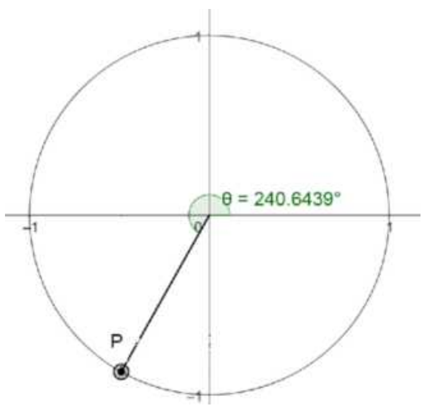
Définition du cosinus d'un angle orienté :

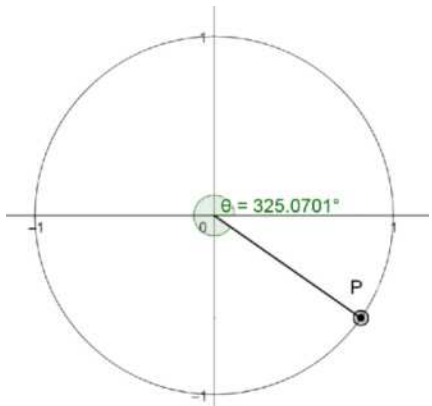
> **Le cosinus d'un angle α rapporté au cercle trigonométrique est l'abscisse du point M représentant l'angle α sur le cercle trigonométrique.**

Représentation dans chaque quadrant









5.2. Valeurs extrêmes du sinus et du cosinus

Puisque le cosinus et le sinus d'un angle sont respectivement les abscisse et ordonnée d'un point du cercle trigonométrique, ces nombres ne peuvent varier qu'entre -1 et 1.

$$\mathbf{0 \leq \sin \alpha \leq 1} \text{ et } \mathbf{0 \leq \cos \alpha \leq 1}$$

Exemples fondamentaux

Á l'aide du cercle trigonométrique, complète les pointillés :

$\cos 0° = \dots\dots$ $\cos 90° = \dots\dots$ $\cos 180° = \dots\dots$ $\cos 270° = \dots\dots$ $\cos 360° = \dots\dots$

$\sin 0° = \dots\dots$ $\sin 90° = \dots\dots$ $\sin 180° = \dots\dots$ $\sin 270° = \dots\dots$ $\sin 360° = \dots\dots$

5.3. Relation fondamentale

Dans le triangle OBM (figure 1), par Pythagore, nous pouvons écrire :

$$\overline{OB}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{OM}^2$$

Comme $\overline{OB} = cosx$ $\overline{BM} = sinx$ et que $\overline{OM} = 1$

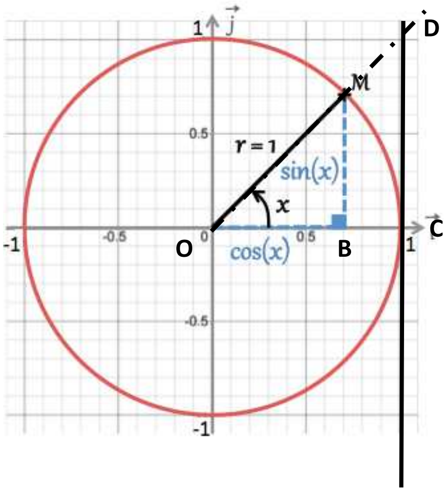
$$\text{Cos}^2x + \sin^2 x = 1^2$$

Ce raisonnement est applicable pour les angles orientés des 4 quadrants.

En conclusion, quel que soit l'angle a :

$$\mathbf{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

5.4. Tangente d'un angle orienté



Reprenons notre figure 1 et traçons la tangente au cercle au point de coordonnée (1 ; 0). Cette droite est appelée **l'axe des tangentes.**

Prolongeons la demi-droite [OM. Appelons **D** le point d'intersection de cette demi-droite et l'axe des tangentes. Et **C** sa projection orthogonale sur OB.

Dans le triangle rectangle OBM, nous avons :

$$\tan x = \frac{\overline{BM}}{\overline{OB}} = \frac{sinx}{cosx} \quad (\text{si } \cos x \neq 0)$$

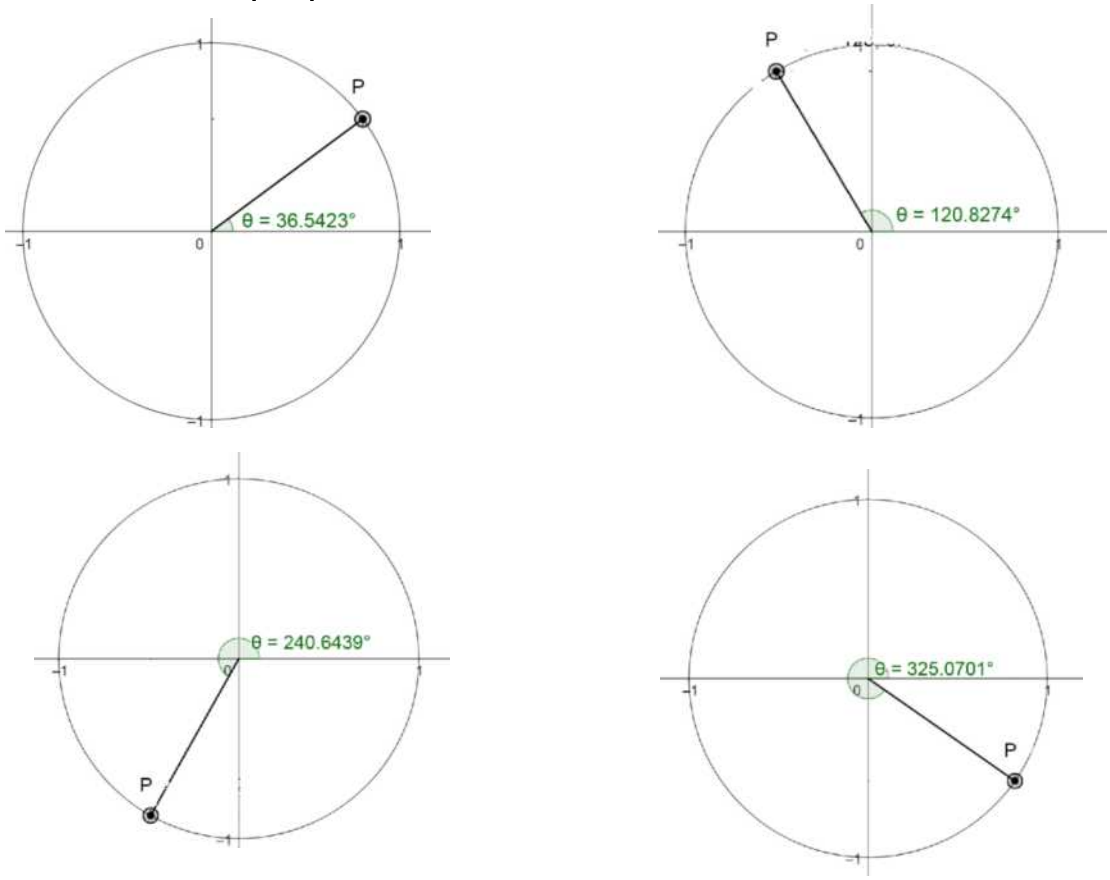
De plus, comme les triangles △OBM et △OCD sont semblables :

$$\tan x = \frac{\overline{BM}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{OC}} = \overline{DC} \text{ car } \overline{OC} = 1$$

Définition de la tangente d'un angle orienté :

La tangente d'un angle α rapporté au cercle trigonométrique est l'ordonnée du point d'intersection de l'axe des tangentes et de la droite OD, D étant le point représentatif de l'angle α sur le cercle trigonométrique.

Représentation dans chaque quadrant



Remarque : La tangente d'un angle peut varier de -∞ à +∞.

<u>Condition d'existence</u> :

Á l'aide du cercle trigonométrique, complète :

tan 0° = …… tan 90° = …… tan 180° = …… tan 270° = …… tan 360° = ……

De part sa définition ou de part sa représentation sur le cercle trigonométrique, nous pouvons constater que la tangente de certains angles n'existe pas.

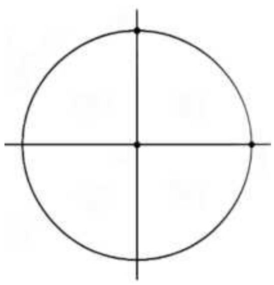
C'est le cas de ……………… et de ………………….. .

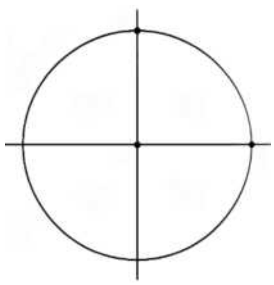
De manière générale :

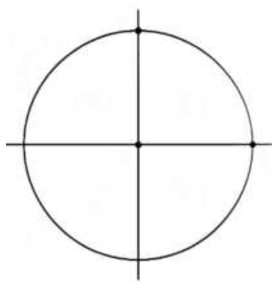
CE de tan α : $\alpha \neq 90° + k.180°$, $k \in Z$

5.5. Signes des nombres trigonométriques

Voici, de manière résumée, le signe des nombres trigonométriques d'angles en fonction du quadrant dans lequel ils se trouvent :


Sinus


Cosinus


Tangente

6. TABLEAU DES VALEURS PARTICULIERES

Ci-dessous, quelques valeurs particulières des nombres trigonométriques :

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

7. ANGLES ASSOCIES

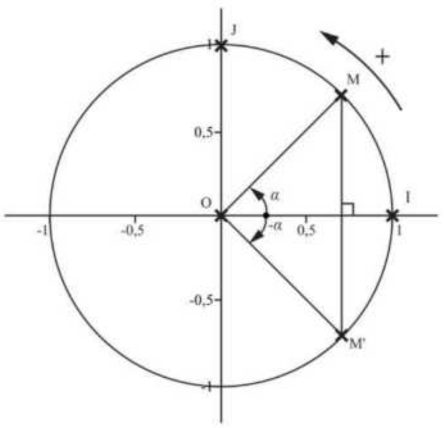
Comme nous avons pu le constater dans nos recherches, certains angles ont le même sinus, cosinus,… ou des sinus, cosinus,.. opposées.

7.1. Angles opposés

Deux angles sont opposés si la somme de leur amplitude est nulle (à un certain nombre de tours complets près).

Exemples : ……………………………………………………………………………………………

Écriture générale : α et ……………………… sont des angles opposés



sin (-α) = … sin (α)

cos (-α) = … cos (α)

tan (-α) = … tan (α)

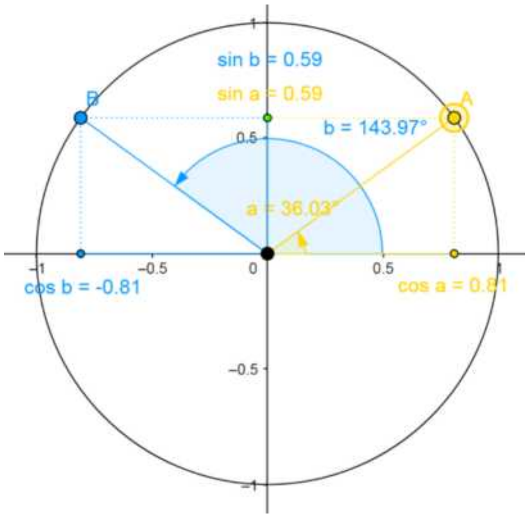
Exemple : Sans utiliser la calculatrice, calcule $\sin(-45°) =$ … …

7.2. Angles supplémentaires

Deux angles sont supplémentaires si la somme de leur amplitude est égale à 180° (à un certain nombre de tours complets près).

Exemples : ………………………………………………………………………………………

Écriture générale : α et ……………………… sont des angles supplémentaires



Sin (180° - α) = … sin (α)

Cos (180°- α) = … cos (α)

Tan (180° - α) = … tan (α)

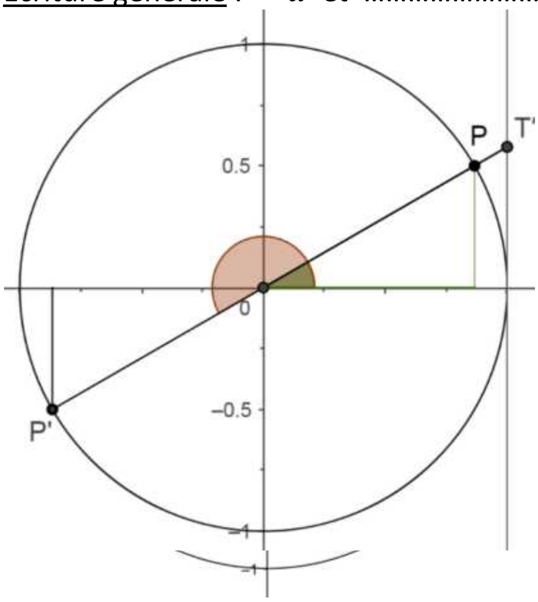
Exemple : Sans utiliser la calculatrice, calcule cos (150°) = … …

7.3. Angles anti-supplémentaires

Deux angles sont anti-supplémentaires si la différence de leur amplitude est égale à 180° (à un certain nombre de tours complets près).

Exemples : ………………………………………………………………………………………

Écriture générale : α et ……………………… sont des angles anti-supplémentaires



Sin (180° + α) = … sin (α)

Cos (180°+ α) = … cos (α)

Tan (180° + α) = … tan (α)

Exemple : Sans utiliser la calculatrice, calcule cos (240°) = … …

8. EXERCICES

Exercice 1

En utilisant ta calculatrice, calcule au millième près :

Sin 34° =	Tan 172° =	Sin 123°17’25’’ =	Cos 193° =
Cos 236° =	Sin 46,12° =	Sin (-32°) =	Tan (-192°) =
Tan 270° =	Sin 90° =	Cos 0° =	Tan(-90°) =

Exercice 2

Sur un cercle trigonométrique (de rayon 3 cm), représente graphiquement le sinus (en bleu), le cosinus (en vert) et la tangente (en rouge) des angles indiqués ci-dessous (un dessin par angle !).

Pour chaque angle, estime ensuite les valeurs de ces quatre mesures et vérifie-les à l'aide d'une calculatrice.

a) 75°	b) 160°	c) 234°	d) 340°	e) -25°	f) -130°

Exercice 3

Sans représenter les angles dans le cercle trigonométrique, complète le tableau suivant :

Angle α	**Signe de**					
152°	$\sin\alpha$		$\cos\alpha$		$\tan\alpha$	
-65°	$\sin\alpha$		$\cos\alpha$		$\tan\alpha$	
398°	$\sin\alpha$		$\cos\alpha$		$\tan\alpha$	
205°	$\sin\alpha$		$\cos\alpha$		$\tan\alpha$	
-150°	$\sin\alpha$		$\cos\alpha$		$\tan\alpha$	
90°	$\sin\alpha$		$\cos\alpha$		$\tan\alpha$	

Exercice 4

Dans un cercle trigonométrique (de rayon 2 cm), représente le(s) angle(s) α tel(s) que :

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ c) $\tan\alpha = \frac{3}{2}$ e) $\sin\alpha = -\frac{3}{4}$ g) $\tan\alpha = -1{,}25$

b) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ d) $\tan\alpha = -1$ f) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ h) $\cos\alpha = 2{,}8$

Exercice 5

Sans utiliser la calculatrice, calcule **si c'est possible** les nombres trigonométriques de l'angle α si :

a) $\alpha \in [90°, 180°]$ et si $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

b) $\alpha \in [180°, 270°]$ et si $\cos\alpha = \frac{3}{4}$

c) $\alpha \in [90°, 180°]$ et si $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$

d) $\alpha \in [180°, 270°]$ et si $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\alpha \in [0°, 90°]$ et si $\sin\alpha = \frac{5}{4}$

f) $\cos\alpha \geq 0$ et si $\sin\alpha = \frac{12}{13}$

g) $\alpha \in [270°, 360°]$ et si $\cos\alpha = \frac{3}{4}$

h) $\sin\alpha \leq 0$ et si $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

i) $\operatorname{tg}\alpha \geq 0$ et si $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $\alpha \in [270°, 360°]$ et si $\cos\alpha = 0{,}2$

Exercice 6

Vrai ou faux ? Dans le cas où l'égalité est fausse, corrige-la.

a) $\sin 60° = \sin 120°$

b) $\sin 60° = \sin(-60°)$

c) $\cos 30° = \cos 330°$

d) $\cos 45° = \sin 45°$

e) $\cos 60° = \sin 390°$

f) $\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg}(-45°)$

g) $\sin 60° = \sin 300°$

h) $\operatorname{tg} 210° = \operatorname{tg}(-30°)$

i) $\cos 3° = \cos 177°$

j) $\operatorname{cotg}(-120°) = \operatorname{cotg} 420°$

k) $\operatorname{tg} 12° = \operatorname{tg} 192°$

l) $\cos 14° = -\sin 86°$

Exercice 7

Calcule les expressions suivantes sans utiliser de calculatrice :

a) $\sin 120°$

b) $\cos 135°$

c) $\operatorname{cotg} 240°$

d) $\cos 330°$

e) $\cos 150°$

f) $\operatorname{tg} 315°$

g) $\sin(-60°)$

i) $\cos 120° .\ \sin 225°$

j) $\frac{\sin 240°}{\operatorname{tg} 330°}$

k) $\cos 150° . \sin 330°$

l) $\operatorname{cotg} 315° . \operatorname{cotg} 180°$

m) $\frac{\operatorname{tg} 300° \;\; \cos 135°}{\sin(-60°)\, \operatorname{cotg} 210°}$

n) $\frac{\cos 135° \;\; \sin 60°}{\operatorname{cotg}(-60°)\, \operatorname{tg} 225°}$

o) $\frac{\sin 135° \;\; \cos 225°}{\operatorname{tg} 210°\, \operatorname{cotg} 210°}$

9. TRIGONOMETRIE DU TRIANGLE QUELCONQUE

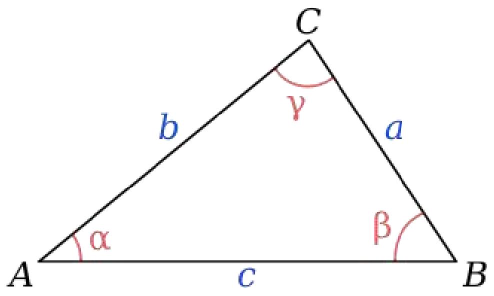
En troisième année, tu as appris à déterminer les longueurs des côtés et les amplitudes des angles d'un triangle rectangle.
Dans ce chapitre, nous allons apprendre à résoudre le même style d'exercices mais dans un triangle quelconque.

9.1. Conventions de notations

Dans un triangle ABC quelconque, nous prendrons les conventions suivantes :

- l'angle de sommet A est noté α (alpha) ;
- l'angle de sommet B est noté β (beta) ;
- l'angle de sommet C est noté γ (gamma).

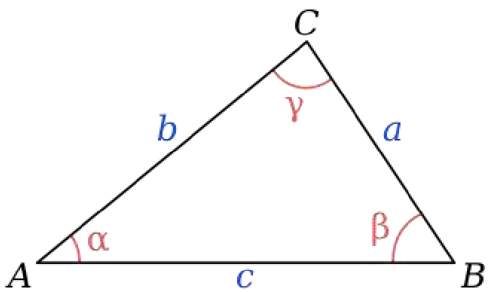
- la longueur du côté [BC] est notée a ;
- la longueur du côté [AC] est notée b ;
- la longueur du côté [AB] est notée c.



9.2. Lois des cosinus ou théorème d'Al Kashi (Pythagore généralisé)

Dans tout triangle, le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés diminuée du double produit des longueurs de ces deux côtés et du cosinus de l'angle formé par ces côtés.

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$
$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$$
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$



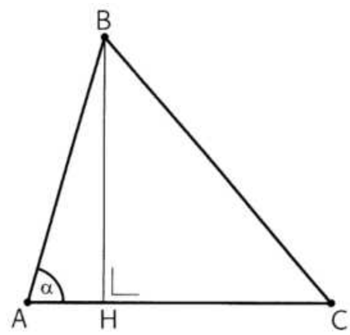
Démonstration :

On ne démontrera que la première égalité : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, les deux autres se démontrant de manière analogue.

- **1^er^ cas : les trois angles du triangle ABC sont aigus.**

On trace la hauteur $[BH]$.
Dans le triangle rectangle *HBC*, on a

$$|BC|^2 = |BH|^2 + |CH|^2 \qquad \textit{(théorème de Pythagore)}$$
$$a^2 = |BH|^2 + (|AC| - |AH|)^2$$
$$a^2 = |BH|^2 + |AC|^2 - 2|AC||AH| + |AH|^2$$
$$a^2 = |BH|^2 + |AH|^2 + b^2 - 2b|AH| \ (*)$$



Or, dans le triangle rectangle *HBA*, on a

1) $|AB|^2 = |AH|^2 + |BH|^2$ ou encore $c^2 = |AH|^2 + |BH|^2$ (théorème de Pythagore)
2) $\cos\alpha = \frac{|AH|}{|AB|}$ ou encore $|AH| = c\cos\alpha$

L'égalité (*) devient alors $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$

- **2ème cas : un angle du triangle ABC est obtus.**

Soit α l'angle obtus. On a $\alpha' = 180° - \alpha$.

On trace la hauteur $[BH]$.

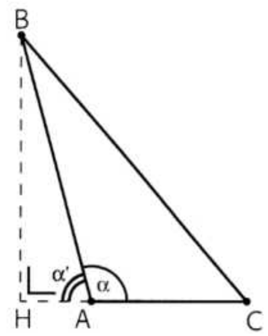
Dans le triangle rectangle *HBC*, on a

$$|BC|^2 = |BH|^2 + |CH|^2 \qquad \text{(théorème de Pythagore)}$$

$$a^2 = |BH|^2 + (|AC| + |AH|)^2$$

$$a^2 = |BH|^2 + |AC|^2 + 2|AC||AH| + |AH|^2$$

$$a^2 = |BH|^2 + |AH|^2 + b^2 + 2b|AH| \ (*)$$



Or, dans le triangle rectangle *HBA*, on a

1) $|AB|^2 = |AH|^2 + |BH|^2$ ou encore $c^2 = |AH|^2 + |BH|^2$ (théorème de Pythagore)

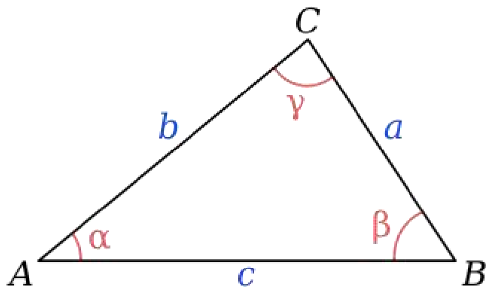
2) $\cos\alpha' = \frac{|AH|}{|AB|}$ ou encore $|AH| = c\cos\alpha' = c\cos(180° - \alpha) = -c\cos\alpha$

L'égalité (*) devient alors $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$

9.3. Lois des sinus

Dans tout triangle, les longueurs des côtés sont proportionnelles aux sinus des angles opposés.

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{a}}{\sin\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sin\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\sin\boldsymbol{\gamma}}}$$



Démonstration :

- **1er cas : les trois angles du triangle ABC sont aigus.**

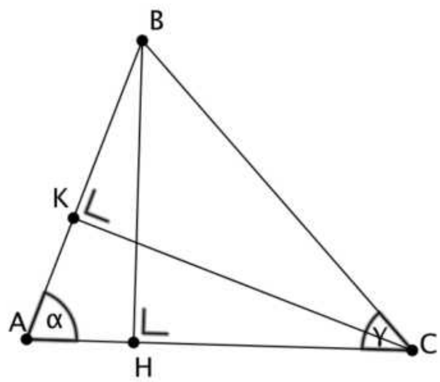
On trace les hauteurs $[BH]$ et $[CK]$.

Dans le triangle rectangle HBA, on a $|BH| = c\sin\alpha$

Dans le triangle rectangle HBC, on a $|BH| = a\sin\gamma$

$$\Rightarrow \quad c\sin\alpha = a\sin\gamma$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



Dans le triangle rectangle KAC, on a $|CK| = b\sin\alpha$

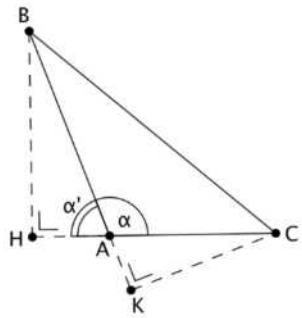
Dans le triangle rectangle KBC, on a $|CK| = a\sin\beta$

$$\Rightarrow \quad b\sin\alpha = a\sin\beta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Par transitivité de l'égalité, on a $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

- **2ème cas : un angle du triangle ABC est obtus.**



Soit α l'angle obtus. On a $\alpha' = 180° - \alpha$.

On trace les hauteurs $[BH]$ et $[CK]$.

Dans le triangle rectangle HBA, on a $|BH| = c\sin(180° - \alpha) = c\sin\alpha$

Dans le triangle rectangle HBC, on a $|BH| = a\sin\gamma$

$$\Longrightarrow \quad c\sin\alpha = a\sin\gamma$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Dans le triangle rectangle KAC, on a $|CK| = b\sin(180° - \alpha) = b\sin\alpha$

Dans le triangle rectangle KBC, on a $|CK| = a\sin\beta$

$$\Longrightarrow \quad b\sin\alpha = a\sin\beta$$

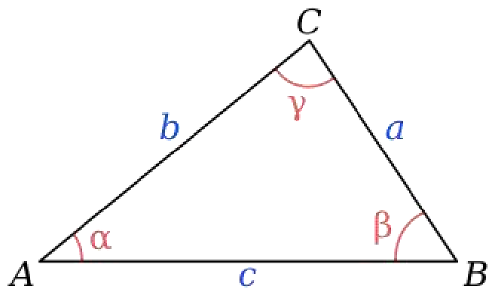
$$\Longrightarrow \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Au total, on a $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

9.4. Aire d'un triangle

L'aire de tout triangle est égale à la moitié du produit des longueurs de deux de ses côtés et du sinus de l'angle que ces côtés forment entre eux.

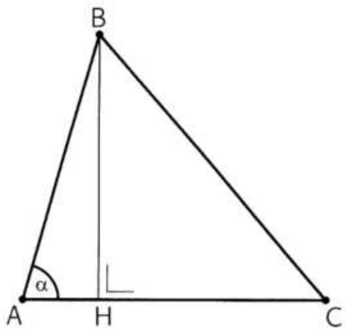
$$\textbf{Aire } \boldsymbol{ABC} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{ab\sin\gamma} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{bc\sin\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{ac\sin\beta}$$



Démonstration :

On démontre par exemple la deuxième égalité Aire $ABC = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, les deux autres se démontrant de manière analogue.

- **1er cas : les trois angles du triangle ABC sont aigus.**



On trace la hauteur $[BH]$.

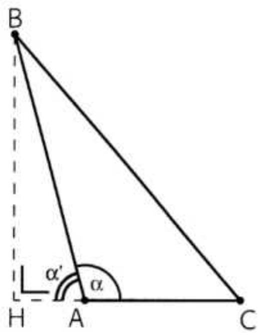
$$\text{Aire}ABC = \frac{\text{base . hauteur}}{2} = \frac{1}{2}|AC|.|BH| = \frac{1}{2}\,b.|BH|$$

Or, dans le triangle rectangle HBA, on a $\sin\alpha = \frac{|BH|}{|AB|}$

ou encore $|BH| = c\sin\alpha$.

Donc, Aire $ABC = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

- **2ème cas : un angle du triangle ABC est obtus.**



Soit α l'angle obtus. On a $\alpha' = 180° - \alpha$.
On trace la hauteur $[BH]$.

$$\text{Aire } ABC = \frac{\text{base . hauteur}}{2} = \frac{1}{2}|AC|.|BH| = \frac{1}{2}\,b.|BH|$$

Or, dans le triangle rectangle HBA, on a $\sin\alpha' = \frac{|BH|}{|AB|}$

ou encore $|BH| = c\sin(180° - \alpha) = c\sin\alpha$.

Donc, Aire $ABC = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

9.5. Résolution d'un triangle quelconque

Résoudre un triangle, c'est "L'art de trouver les parties inconnues d'un triangle par le moyen de celles qu'on connaît" (M. D'ALEMBERT).

Résoudre un triangle c'est donc déterminer les longueurs de ses trois côtés ainsi que les mesures de ses trois angles en connaissant certaines de ces informations.

9.5.1. Quelques conseils pour résoudre un triangle :

1) Lorsque deux angles sont donnés, le troisième est calculé en utilisant la propriété des angles intérieurs d'un triangle : $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
2) Quelle que soit la mesure d'angle fournie par la calculatrice, il faut évidemment que celle-ci soit comprise entre 0° et 180°.
3) Lorsqu'un seul angle est donné, chacun des angles inconnus est déterminé par la **loi des cosinus** de préférence. En effet, si l'angle est donné par son cosinus, seule la solution comprise entre 0° et 180° est à retenir. C'est celle qui est donnée par la calculatrice. Par contre, si l'angle est donné par son sinus, deux solutions comprises entre 0° et 180° sont à prendre en compte. L'une d'elle est donnée par la calculatrice, l'autre étant la supplémentaire de la première.
4) Il est utile de vérifier que le plus grand côté est opposé au plus grand angle.

Si on connaît …	… on utilise …
deux angles et un côté	- la somme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ pour trouver le troisième angle - la loi des **sinus** pour trouver les deux autres côtés
deux côtés et l'angle formé par ces deux côtés	- la loi des **cosinus** pour trouver le troisième côté et un deuxième angle - la somme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ pour trouver le troisième angle
trois côtés	- la loi des **cosinus** pour trouver deux angles - la somme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ pour trouver le troisième angle

9.5.2. Exemples résolus

1) Résous le triangle *ABC* pour lequel on donne $\alpha = 83°$, $b = 29\ cm$ et $c = 32\ cm$.

- Recherche de a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Longrightarrow \quad a^2 = 29^2 + 32^2 - 2\,.\,29\,.\,32\cos 83°$$
$$a^2 = 841 + 1024 - 1856\,.\,0{,}1218693434$$
$$a^2 = 1638{,}810499$$
$$a = 40{,}48\ cm$$

- <u>Recherche de β</u>

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \Longrightarrow \quad 29^2 = 40{,}48^2 + 32^2 - 2\,.\,40{,}48\,.\,32\cos\beta$$

$$\frac{29^2 - 40{,}48^2 - 32^2}{-2\,.40{,}48\,.32} = \cos\beta$$

$$\cos\beta = 0{,}70316806$$

$$\beta = 45{,}32°$$

- <u>Recherche de γ</u>

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Longrightarrow \quad 83° + 45{,}32° + \gamma = 180°$$

$$\gamma = 180° - 83° - 45{,}32°$$

$$\gamma = 51{,}68°$$

2) Résous le triangle ABC pour lequel on donne $\alpha = 28°$, $\beta = 57°$ et $c = 12{,}4\ cm$.

- <u>Recherche de γ</u>

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Longrightarrow \quad 28° + 57° + \gamma = 180°$$

$$\gamma = 180° - 28° - 57°$$

$$\gamma = 95°$$

- <u>Recherche de a</u>

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{\sin 28°} = \frac{12{,}4}{\sin 95°}$$

$$a = \frac{12{,}4}{\sin 95°}\sin 28°$$

$$a = 5{,}84\ cm$$

- <u>Recherche de b</u>

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Longrightarrow \quad \frac{b}{\sin 57°} = \frac{12{,}4}{\sin 95°}$$

$$b = \frac{12{,}4}{\sin 95°}\sin 57°$$

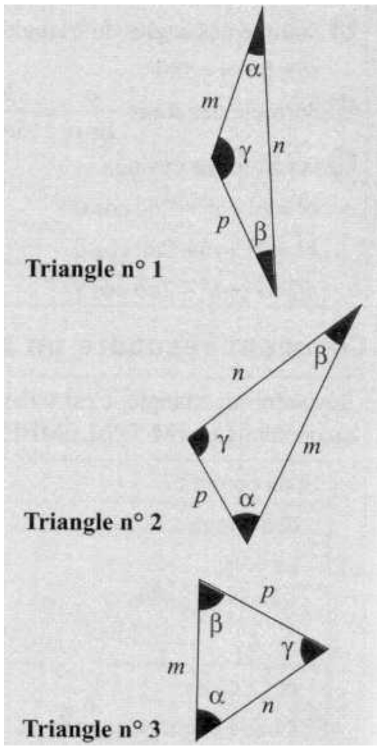
$$b = 10{,}44\ cm$$

9.6. Exercices

Exercice 1

Voici une série de formules et trois triangles. Á quel triangle peut-on appliquer chacune des formules ?

1) $p^2 = n^2 + m^2 - 2mn\cos\alpha$
2) $m^2 = n^2 + p^2 - 2np\cos\gamma$
3) $n^2 = m^2 + p^2 - 2mp\cos\beta$
4) $\dfrac{p}{\sin\beta} = \dfrac{n}{\sin\alpha} = \dfrac{m}{\sin\gamma}$
5) $\dfrac{m}{\sin\beta} = \dfrac{p}{\sin\alpha} = \dfrac{n}{\sin\gamma}$
6) $\dfrac{n}{\sin\beta} = \dfrac{p}{\sin\alpha} = \dfrac{m}{\sin\gamma}$
7) $\text{Aire} = \frac{1}{2}mp\sin\beta$
8) $\text{Aire} = \frac{1}{2}np\sin\beta$
9) $\text{Aire} = \frac{1}{2}mn\sin\beta$



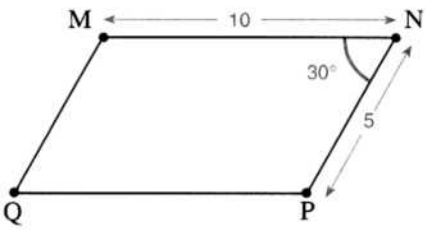
Exercice 2

Résous les triangles pour lesquels on donne les informations ci-dessous et détermine leurs aires.

1) $a = 12{,}71$ $\quad\beta = 49{,}28°$ $\quad\gamma = 65{,}39°$
2) $b = 41{,}72$ $\quad\alpha = 17{,}34°$ $\quad\gamma = 64{,}26°$
3) $b = 18{,}5$ $\quad c = 43{,}17$ $\quad\alpha = 40{,}11°$
4) $a = 31{,}73$ $\quad b = 60{,}04$ $\quad\gamma = 48{,}1°$
5) $a = 12{,}25$ $\quad b = 17{,}25$ $\quad c = 24{,}42$
6) $a = 15{,}31$ $\quad b = 21{,}92$ $\quad c = 24{,}42$

Exercice 3

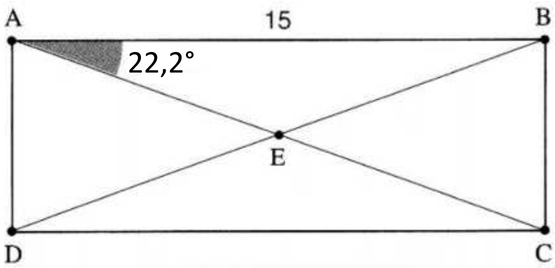
Détermine les angles et la longueur des diagonales du parallélogramme *MNPQ* ainsi que sa surface.



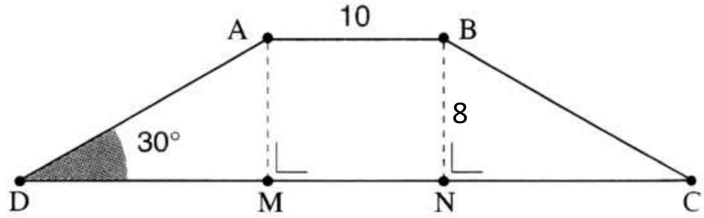
Exercice 4

Pour chacune des figures suivantes, calcule ce qui est demandé.

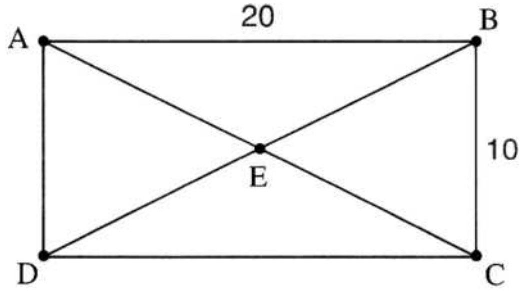
1) $|AD|$ et $|AC|$



2) $|DC|$ et $|AD|(= |BC|)$



3) $|AC|$ et $\widehat{BEC}$



Exercice 5

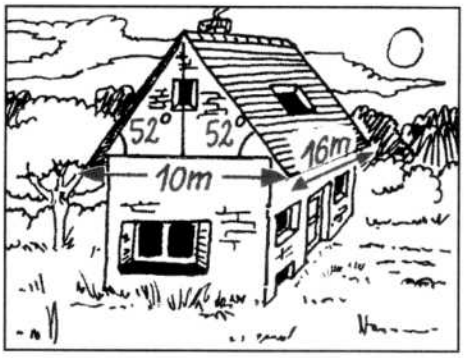
L'ombre d'un arbre mesure 18 mètres lorsque le soleil est à 32° au-dessus de l'horizon.
Quelle est la hauteur de l'arbre ?

Exercice 6

Détermine la hauteur d'un arbre dont l'ombre s'allonge de 12 mètres lorsque le soleil passe de 52° à 30° au-dessus de l'horizon.

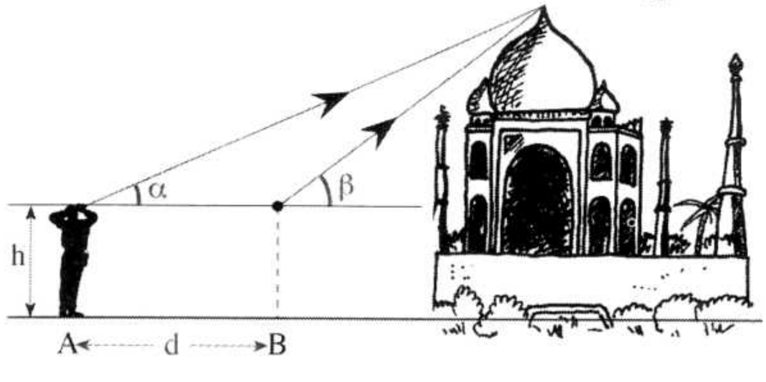
Exercice 7

Calcule, à l'intention du couvreur, la surface totale de la toiture de cette maison.



Exercice 8

Pour mesurer la hauteur d'un édifice en Inde, un touriste s'est placé au point B et a mesuré l'angle β. Il s'est ensuite reculé de d mètres jusqu'au point A, d'où il a mesuré l'angle α.
Quelle est la hauteur de l'édifice si le touriste mesure $1{,}8\ m$ et si les mesures effectuées sont les suivantes : $\alpha = 38°$; $\beta = 54°$; $d = 40\ m$?



Exercice 9

Les diagonales d'un losange mesurent respectivement 15 et 20 *cm*. Calcule l'amplitude des angles et la longueur des côtés du losange.

Exercice 10

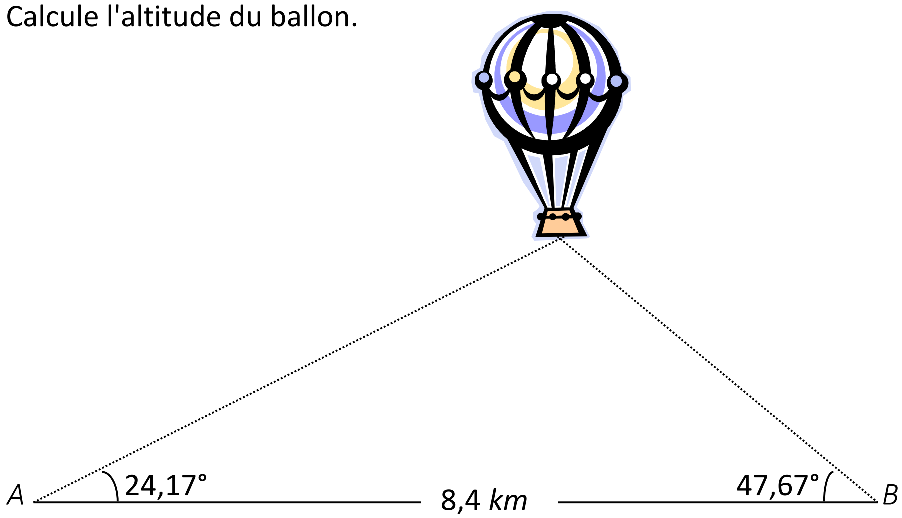
Les côtés parallèles d'un trapèze isocèle mesurent respectivement 8 et 20 *cm* et la hauteur 7 *cm*. Calcule la longueur des deux autres côtés, ainsi que l'amplitude des angles du trapèze.

Exercice 11

Un géomètre veut déterminer la distance qui le sépare d'un arbre situé sur l'autre rive d'un canal.
Son collègue se place plus loin sur la même berge, à une distance de 90 mètres. L'angle entre la direction de l'arbre et la position de son collègue est de 37,20°.
Le géomètre échange ensuite sa position avec celle de son collègue et relève un deuxième angle qui est de 64,10°.
Calcule la distance entre l'arbre et la première position du géomètre.

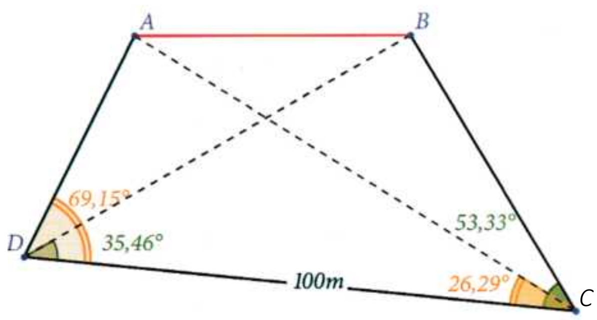
Exercice 12

Les angles d'élévation d'un ballon à partir de deux points au sol, *A* et *B*, sont respectivement de 24,17° et 47,67°.
Les points *A* et *B* sont distants de 8,4 *km* et le ballon se situe entre ces points, dans un même plan vertical. Calcule l'altitude du ballon.



Exercice 13

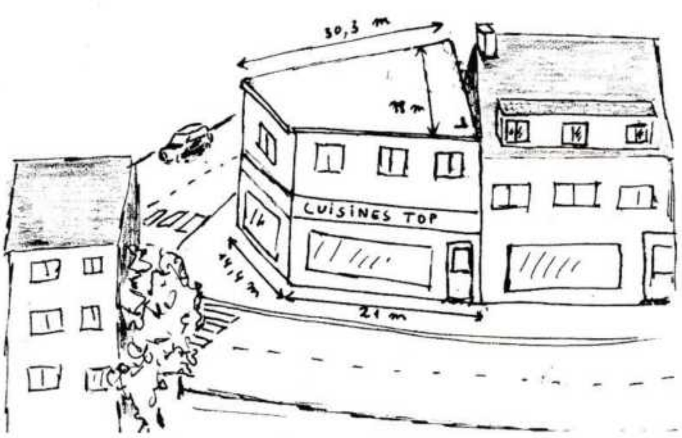
La lagune à Venise sépare les clochers *A* et *B*.
Nous avons les mesures suivantes prises à partir de deux endroits *C* et *D* distants de 100 *m* :



Quelle est la distance séparant les clochers *A* et *B* ?

Exercice 14

Un agent immobilier propose à un fabricant de cuisines équipées un local d'exposition situé à un carrefour. Il faut que la surface soit d'au moins $380\ m^2$. Il relève les dimensions extérieures du bâtiment : toit et surface au sol ont la forme d'un quadrilatère dont un angle est droit, les côtés mesurent $30{,}3\ m$, $14{,}4\ m$, $21\ m$ et $18\ m$.
Ce local convient-il au fabriquant ?



SOLUTIONS DES EXERCICES

Ex 1	1) 1 et 3 2) 2 et 3 3) 3 4) 2 5) 1 6) 3 7) 3 8) 1 9) 2
Ex 2	1) $\alpha = 65{,}33°$ $b = 10{,}6$ $c = 12{,}72$ Aire = 61,24 2) $\beta = 98{,}4°$ $a = 12{,}57$ $c = 37{,}99$ Aire = 236,19 3) $\beta = 22{,}32°$ $\gamma = 117{,}57°$ $a = 31{,}37$ Aire = 257,22 4) $\alpha = 31{,}29°$ $\beta = 100{,}61°$ $c = 45{,}46$ Aire = 700,94 5) $\alpha = 28{,}01°$ $\beta = 41{,}39°$ $\gamma = 110{,}6°$ Aire = 98,9 6) $\alpha = 38{,}1°$ $\beta = 62{,}07°$ $\gamma = 79{,}83°$ Aire = 165,16
Ex 3	$\widehat{MQP} = 30°$ $\widehat{QMN} = \widehat{QPN} = 150°$ $\lvert MP\rvert = 6{,}2$ $\lvert QN\rvert = 14{,}55$ Aire de *MNPQ* = 25
Ex 4	1) $\lvert AD\rvert = 6{,}12$ $\lvert AC\rvert = 16{,}2$ 2) $\lvert DC\rvert = 37{,}71$ $\lvert AD\rvert = 16$ 3) $\lvert AC\rvert = 22{,}36$ $\widehat{BEC} = 53{,}13°$
Ex 5	La hauteur de l'arbre est de 11,25 mètres.
Ex 6	La hauteur de l'arbre est de 12,62 mètres.
Ex 7	La surface totale de la toiture est de $259{,}84\ m^2$.
Ex 8	La hauteur de l'édifice est de 74,08 mètres.
Ex 9	Longueur des côtés : 12,5 *cm* Angles : $\alpha = 106{,}26°$ et $\beta = 73{,}74°$
Ex 10	Longueur des deux autres côtés : 9,2 *cm* Angles : $\alpha = 49{,}54°$ et $\beta = 130{,}46°$
Ex 11	La distance entre l'arbre et la position du géomètre est de 82,56 mètres.
Ex 12	Le ballon se trouve à une altitude de 2,68 *km*.
Ex 13	La distance entre les deux clochers est de 49,75 mètres.
Ex 14	Ce local convient au fabriquant de cuisines car sa surface est de $387{,}68\ m^2$.