COLLEGE SAINT-BARTHELEMY

MATHEMATIQUE

PREMIERE ANNEE

LES NOMBRES

Première partie : Les nombres naturels

Opérations – Propriétés

Diviseurs et multiples – Nombres premiers

ANNEE SCOLAIRE 202… – 202…

Compétences

Expliciter les savoirs et les procédures

- Justifier une méthode de calcul en utilisant les propriétés des opérations (y compris la distributivité) en L.L. ou L.M..
- Reconnaitre les circonstances d'utilisation des termes usuels, des notations et des opérations propres aux nombres.
- Vérifier avec une calculatrice la plausibilité d'un résultat.
- Justifier le choix d'une décomposition d'un nombre pour vérifier une divisibilité.
- Justifier un caractère de divisibilité en citant les propriétés utilisées.
- Justifier une propriété de divisibilité en évoquant une représentation du nombre.

Appliquer une procédure

- Respecter les priorités des opérations pour effectuer des opérations dans des situations variées.
- Estimer l'ordre de grandeur d'un résultat avant d'opérer.
- Effectuer un calcul comportant plusieurs étapes à l'aide d'une calculatrice.
- Dénombrer par un calcul et le cas échéant par une formule.
- Décomposer un nombre pour vérifier une divisibilité.
- Trouver tous les diviseurs d'un nombre à partir de sa décomposition en facteurs premiers.
- Retrouver un nombre décomposé en facteurs premiers.

Résoudre un problème

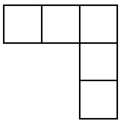
- Élaborer une formule qui traduit une régularité dans des suites de motifs (ou de nombres).
- Construire des expressions littérales où la lettre a le statut de variable ou d'inconnue.

EXPLORATION : LES NOMBRES FIGURES

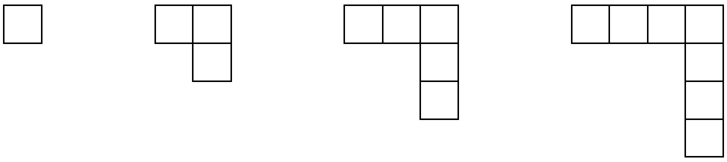
1. LES GNOMONS

Un gnomon est un cadran solaire primitif. Mais, les Pythagoriciens les représentaient par une figure géométrique formée de deux barrettes de même longueur ; l'une horizontale et l'autre verticale.

Exemple :



En te basant sur la représentation des 4 premiers gnomons :



a) Complète le tableau suivant et établis ainsi la formule qui te permet de déterminer le nombre de petits carrés dans le « $n^{ième}$ » gnomon.

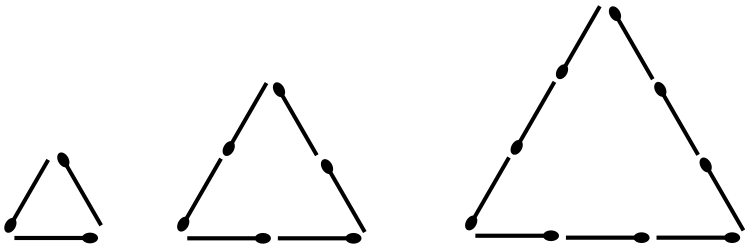
Numéro du gnomon	1	2	3	4	…	7	12	30	n		
Nbre de petits carrés										57	123
Accroissements											

b) Comment passes-tu d'un gnomon au gnomon suivant ?

c) Trouve un raisonnement qui te permettrait de convaincre un élève qui hésite (schéma, explication, …) face à la formule trouvée.

2. DES CONFIGURATIONS D'ALLUMETTES

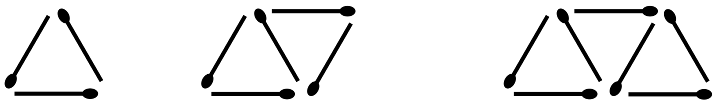
a) Chacune des figures ci-dessous est formée d'allumettes de même longueur. Calcule le nombre d'allumettes utilisées pour construire le premier triangle, le deuxième, le troisième, le quatrième, le cinquième, le dixième,… Imagine une loi qui permettrait de calculer le nombre d'allumettes nécessaires pour construire le **n**ième triangle.



1 2 3

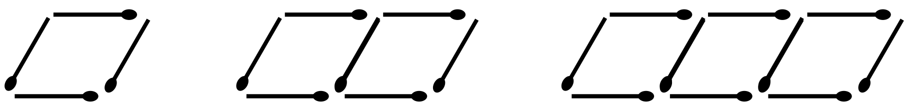
Numéro du triangle	1	2	3	4	…	7	12	30	n		
Nbre d'allumettes										57	123
Accroissements											

b) Réponds aux mêmes questions à propos des configurations suivantes :



1 2 3

Numéro de la figure	1	2	3	4	…	7	12	30	n		
Nbre d'allumettes										57	123
Accroissements											

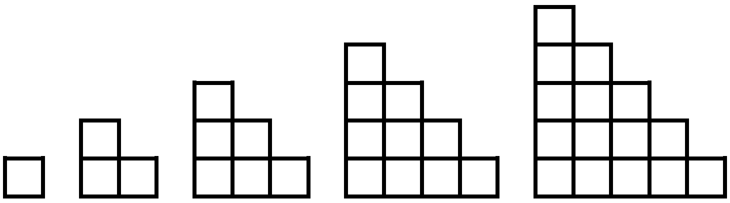


1 2 3

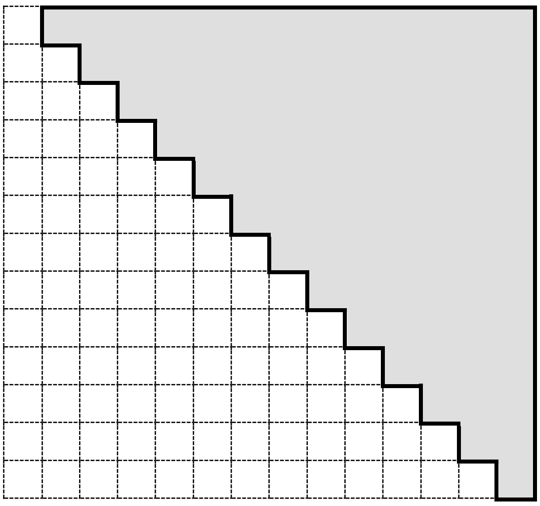
Numéro de la figure	1	2	3	4	…	7	12	30	n		
Nbre d'allumettes										58	123
Accroissements											

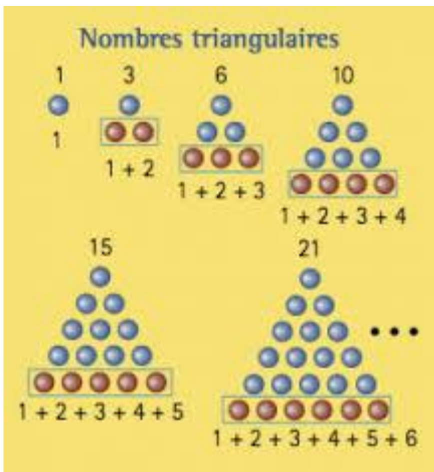
3. PILES DE CARRES ET NOMBRES TRIANGULAIRES

a) On peut continuer à dessiner des piles de carrés qui progressent comme celles de la figure ci-dessous. Combien y a-t-il de carrés dans chaque pile ? Peut-on prévoir combien il y en a dans la 19ème pile ? Et la 100ème ?



b) La figure suivante montre une façon de calculer rapidement le double du treizième nombre triangulaire. Quel est ce calcul ? Essaie pour d'autres piles de carrés (19ème, 100ème, …).





4. NOMBRES CARRES, CARRE D'UN NOMBRE

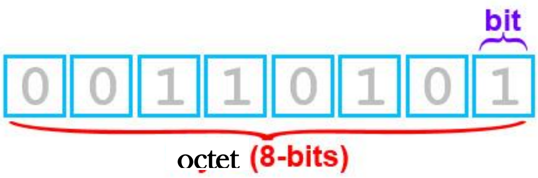
a) Etudier la suite

1
1 + 3
1 + 3 + 5
1 + 3 + 5 + 7
…………….

en calculant les différentes sommes indiquées (et les suivantes) et en dessinant.

b) Quel est le dixième nombre impair, quel est le centième, le $n^{\text{ième}}$?

5. LE BINAIRE

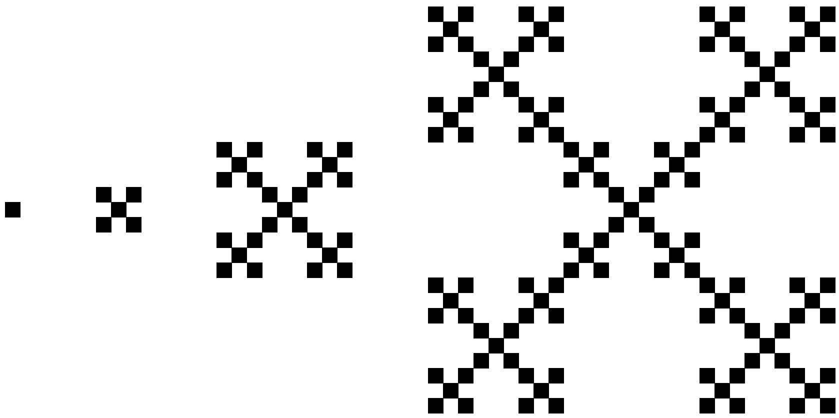


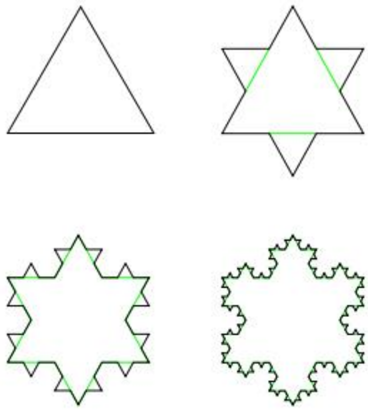
Un ordinateur ne reconnaît que deux signes : le 0 et le 1. Tc messages que reçoit le microprocesseur sont une combinai: 0 et de 1. On dit qu'ils sont écrits en langage binaire. À c touche du clavier correspond une combinaison de 0 et de 1.
Chaque touche correspond à une combinaison électronique (appelée octet) composée de huit bits. Chaque bit est soit actif soit passif, c'est-à-dire qu'il libère ou non du courant électrique. Chaque combinaison est unique et peut être mémorisée et lue sous forme d'une suite de signaux électriques.
Combien de « touche » différentes peux-tu créer en suivant ce principe ?

A 01000001	N 01001110	a 01100001	n 01101110
B 01000010	O 01001111	b 01100010	o 01101111
C 01000011	P 01010000	c 01100011	p 01110000
D 01000100	Q 01010001	d 01100100	q 01110001
E 01000101	R 01010010	e 01100101	r 01110010
F 01000110	S 01010011	f 01100110	s 01110011
G 01000111	T 01010100	g 01100111	t 01110100
H 01001000	U 01010101	h 01101000	u 01110101
I 01001001	V 01010110	i 01101001	v 01110110
J 01001010	W 01010111	j 01101010	w 01110111
K 01001011	X 01011000	k 01101011	x 01111000
L 01001100	Y 01011001	l 01101100	y 01111001
M 01001101	Z 01011010	m 01101101	z 01111010

6. LES FRACTALES

Le flocon de neige est une forme fractale. Pour dessiner une forme fractale, il suffit de partir d'un motif (carré) et de passer au suivant en reportant ce motif aux quatre coins du motif précédent.





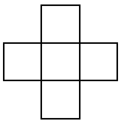
a) Tu peux essayer de dessiner le motif qui correspond à la cinquième étape (sur une double feuille, en centrant le motif).
b) Quel est le nombre de petits carrés de bases contenus dans chaque motif ?
c) Combien de carrés de base contiendra le 6ème motif, le 7ème motif, le 10ème motif,… le n^{ième} motif ? Pour répondre, complète le tableau ci-dessous.

Numéro du motif	1	2	3	4	5	6	7	10	…	143	n
N^{bre} de petits carrés											

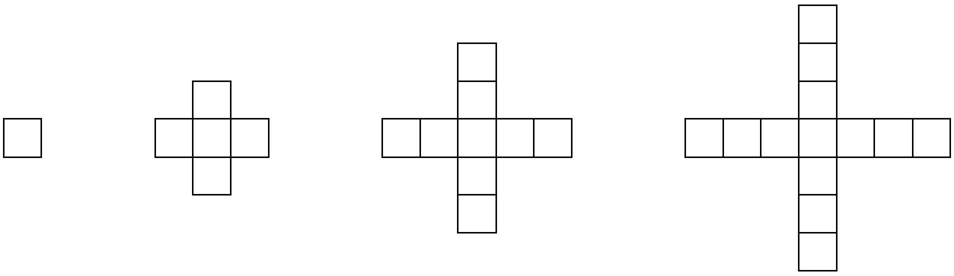
Pour t'entrainer… :

7. LES NOMBRES CROIX

Exemple :



En te basant sur la représentation des 4 premiers nombres croix :



a) Complète le tableau suivant et établis ainsi la formule qui te permet de déterminer le nombre de petits carrés dans le « n^{ième} » nombre croix.

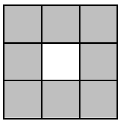
Numéro de la croix	1	2	3	4	…	7	12	30	79	143	n
Nbre de petits carrés											
Accroissements											

b) Comment passes-tu d'une croix à la croix suivante ?

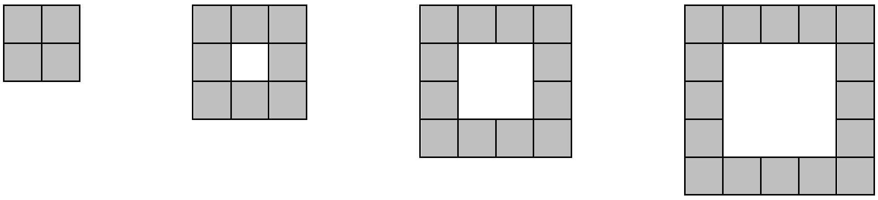
c) Trouve un raisonnement qui te permettrait de convaincre un élève qui hésite (schéma, explication, …) face à la formule trouvée.

8. LES NOMBRES CADRES

Exemple :



En te basant sur la représentation des 4 premiers nombres cadres :



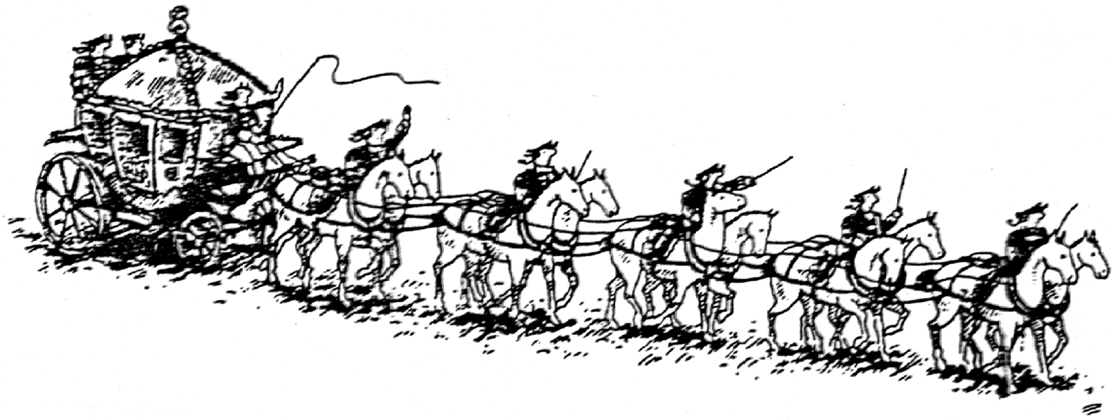
a) Complète le tableau suivant et établis ainsi la formule qui te permet de déterminer le nombre de petits carrés dans le « n^{ième} » nombre cadre.

Numéro du cadre	1	2	3	4	…	7	12	30	79	143	n
Nbre de petits carrés											
Accroissements											

b) Comment passes-tu d'un cadre au cadre suivant ?

9. LE CARROSSE

En ce jour de fête nationale, Frédo I^{er}, roi de l'île Saint-Barthélemy, défile dans son carrosse tracté par plusieurs paires de chevaux. Chaque paire de chevaux est accompagnée d'un soldat. Sur le carrosse, deux laquais et un cocher ont pris place en permanence.



a) Etablis la formule qui permettrait de calculer le nombre d'accompagnateurs du roi par rapport au nombre de chevaux.

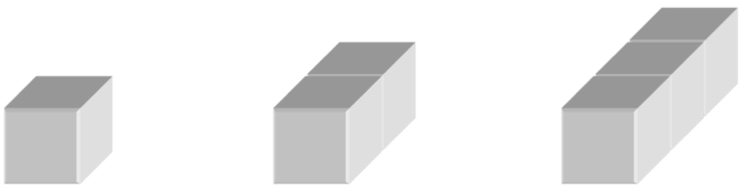
N^{bre} de chevaux	2	4	6	8	.....	n chevaux
N^{bre} d'accompagnateurs du roi						

b) Etablis la formule qui permettrait de calculer le nombre de chevaux par rapport au nombre d'accompagnateurs du roi.

N^{bre} d'accompagnateurs du roi	3	4	5	6	.....	n accomp.
N^{bre} de chevaux						

10. DES CONFIGURATIONS DE CUBES

a) Chacun des solides ci-dessous est formé de cubes identiques (1 cm d'arête). Calcule l'aire totale de chaque solide.



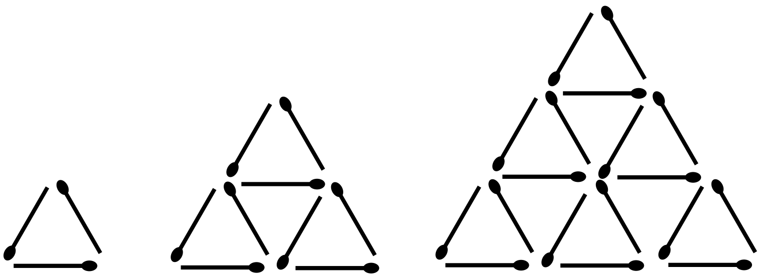
Nombre de cubes	1	2	3	4	...	10	12	30	79	143	n
Aire totale en cm²											
Accroissements											

b) Réponds aux mêmes questions à propos des configurations suivantes :

Numéro du solide	1	2	3	4	…	10	12	30	79	143	n
Aire totale en cm²											
Accroissements											

11. POUR CHERCHER …

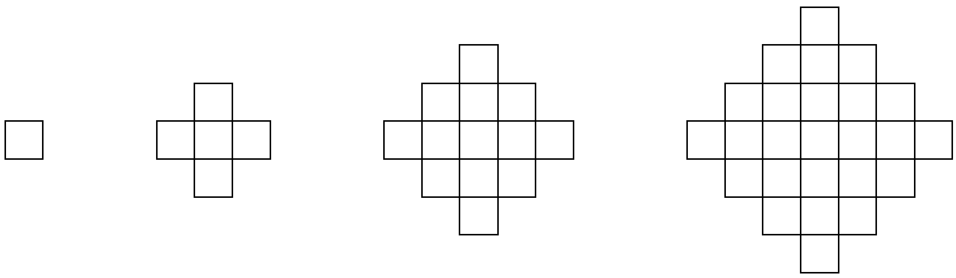
a) Chacune des figures ci-dessous est formée d'allumettes de même longueur. Calcule le nombre d'allumettes utilisées pour construire le premier triangle, le deuxième, le troisième, le quatrième,… Imagine une loi qui permettrait de calculer le nombre d'allumettes nécessaires pour construire le **n**ième triangle.



1 2 3

Numéro du triangle	1	2	3	4	…	10	12	30	79	143	n
Nbre d'allumettes											
Accroissements											

b) En te basant sur la représentation des 4 premières croix :



Complète le tableau suivant et établis ainsi la formule qui te permet de déterminer le nombre de petits carrés dans le « nième » nombre croix.

Numéro de la croix	1	2	3	4	…	7	12	30	79	143	n
Nbre de petits carrés											
Accroissements											

LES NOMBRES NATURELS

1. ROLE DES NOMBRES NATURELS

Les nombres naturels servent à compter les éléments d'un ensemble d'objets de n'importe quelle nature, pour autant qu'il n'y en ait pas une infinité.
Par exemple :

« Deux » convient pour représenter le nombre de chaussures qui sont à tes pieds.
« Dix » convient pour représenter le nombre ....
« Six » convient pour représenter le nombre ....

Remarque :

Le nombre « zéro » exprime l'absence d'objets à compter.
L'ensemble de tous les nombres naturels se note $\mathbb{N}$.

2. LEUR ECRITURE

Ces nombres naturels peuvent s'écrire de différentes manières :

a) en ***langage littéraire (L.L.)*** : soixante-huit (attention à l'orthographe !)
... et dans n'importe quelle langue: *achtenzestig, sixty-eight*

b) en ***langage mathématique (L.M.)*** :

1] *avec des chiffres*

Ces chiffres ne sont que des dessins qui servent à exprimer les nombres. Tu connais sûrement déjà :

- les chiffres romains: I (un), V (cinq), X (dix) ... mais surtout
- les chiffres arabes. Ce sont eux bien sûr qui nous intéressent. Ils sont au nombre de dix:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

C'est grâce à eux que nous pourrons aisément exprimer les nombres naturels sans nous soucier de l'orthographe ni de la manière dont on les prononce à l'étranger.

Exemples:

- Le nombre « sept » s'écrira au moyen d'un seul chiffre: 7.
$\rightarrow$ **Il existe donc des nombres d'un seul chiffre.**
- Le nombre « dix-sept » s'écrira au moyen des chiffres 1 et 7.

2] *avec des lettres*

Nous utiliserons parfois une lettre (ex. : $\boldsymbol{x}$), pour désigner l'écriture en général de n'importe quel nombre.

3. LEURS ORDRES (< , >)

Plus un nombre naturel exprime une quantité importante d'objets, plus on dira qu'il est grand. Ce mot ne qualifie évidemment pas la taille des chiffres qui expriment le nombre mais bien la valeur que le nombre représente.
C'est ainsi que :

8 est plus grand que 7.	-	en L.M., on écrira: $8 > 7$.
17 est plus grand que 8.	-	en L.M., on écrira: $17 > 8$.

Réciproquement, on peut écrire que

7 est plus petit que 8.	-	en L.M.: $7 < 8$.
et 8 est plus petit que 17.	-	en L.M.: $8 < 17$.

On découvre ainsi, qu'il est possible de définir deux ordres de classification des nombres naturels:

- l'ordre croissant $<$: ... $< 8 < 9 < 10 < 11 <$ ...
- l'ordre décroissant $>$: ... $> 17 > 16 > 15 > 14 >$ ...

Applique tes connaissances :

1] Place un nombre naturel avant et après celui donné pour que l'expression écrite soit vraie.

..... > 188 > .....

Note une deuxième possibilité.

..... > 188 > .....

2] Place un nombre naturel avant et après celui donné pour que l'expression écrite soit vraie.

..... < 324 < .....

Note une deuxième possibilité.

..... < 324 < .....

Dans l'expression suivante :

$$612 < 613 < 620 ,$$

- 612 et 613 sont appelés **nombres consécutifs** car il n'existe aucun nombre naturel à la fois plus grand que 612 et plus petit que 613.
- 613 et 620 ne sont pas deux nombres consécutifs car ... (essaie de justifier)

  Ton essai:

  ....

  ....

  Réponse retenue:

  ....

  ....

Applique tes connaissances :

1) Ecris cinq nombres consécutifs à la place des « ... » . L'un d'entre eux est 47.

..... < ..... < ..... < ..... < .....

2) Ecris cinq nombres consécutifs à la place des « ... » . L'un d'entre eux est 60.

..... > ..... > ..... > ..... > .....

En général, nous pourrons désigner deux nombres consécutifs en écrivant

x pour l'un et ***x + 1*** pour l'autre.

Notation pour les inégalités :

Langage mathématique	***Langage littéraire***
$x > 5$	x est **strictement** plus grand que 5
$x \geq 4$	x est plus grand ou égal à 4
$x < 8$	x est **strictement** plus petit que 8
$x \leq 7$	x est plus petit ou égal à 7
$5 < x < 9$	x est strictement compris entre 5 et 9
$3 < x \leq 7$	x est strictement plus grand que 3 et plus petit ou égal à 7
$3 \leq x < 7$	x est plus grand ou égal à 3 et strictement plus petit que 7
$3 \leq x \leq 7$	x est plus grand ou égal à 3 et plus petit ou égal à 7

4. LE SIGNE « = »

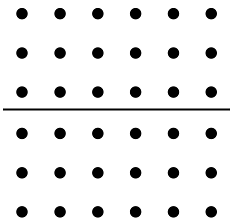
Combien y a-t-il de côtés à un losange ? .....

Combien y a-t-il de pattes à un chien ? .....

On constate que deux quantités identiques d'objets comptés, sont exprimées par le même nombre. Cela signifie que **deux** nombres égaux, ... cela n'existe pas; ce pluriel n'a pas de sens; 4 est le seul nombre à exprimer cette quantité.

Découverte:

Voici des points disposés en carré.



Combien y a-t-il de points dans la moitié supérieure du carré ?

....

Comment avons-nous trouvé ce nombre ?

Prénoms:	Expressions:
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

Conclusion:

S'il n'y a pas deux nombres égaux, il existe une infinité de manières d'exprimer un nombre.
C'est ainsi que 18 aurait pu se noter .... ou encore 17 + 1, 19 - 1, $2^3 + 10$.
C'est la raison pour laquelle on écrira: $18 = 17 + 1 = 19 - 1 = 2^3 + 10 = ...$
Toutes ces expressions apparemment très différentes sont dites « égales » car elles expriment le même nombre.

5. LE CALCUL ET SON ROLE

Le calcul et les différentes opérations qu'il nécessite, a pour objet de remplacer l'expression d'un nombre naturel parfois très compliquée par une autre expression plus simple du même nombre, qui elle, sera plus accessible à notre compréhension.

Exemple:
Nous ne connaissons pas le nombre exprimé par

« (17 + 3) x 5 - 70 ».

Mais si nous l'exprimons par « 30 », nous comprenons immédiatement le nombre dont il s'agit.

Comme ces deux expressions expriment le nombre « trente », nous écrirons:

$$(17 + 3) \times 5 - 70 = 30.$$

Exploration : Les nombres figures

6. L'ADDITION

6.1. Vocabulaire

L'expression mathématique 1 + 2 + 3 + … + 19, s'appelle **somme** de dix-neuf **termes**. Le calcul nous a permis d'exprimer cette somme par le nombre ....

6.2. Propriétés

6.2.1. Commutativité

Lorsqu'on écrit ***8 + 3 = 3 + 8***, on modifie l'ordre des termes de l'addition sans en modifier la somme.

En serait-il de même si on avait choisi d'autres nombres ? OUI - NON

Nous retiendrons dès lors, que

L'addition est commutative.

Cela signifie que l'emplacement des termes dans l'expression par rapport au symbole « + » n'a pas d'influence sur sa valeur. On peut les permuter.

Dans le langage mathématique, nous écrirons:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{N} : \boldsymbol{x + y = y + x}$$

6.2.2. Associativité

Lorsqu'on écrit ***59 + (18 + 12) = (59 + 18) + 12***, on marque, à l'aide des parenthèses, le fait que dans le premier membre on commence par 18 + 12, alors que dans le second, on commence par 59 + 18.
Pourtant le résultat ne change pas.

En serait-il de même si on avait choisi d'autres nombres ? OUI - NON

Le fait que ces deux manières différentes de calculer la somme donnent le même résultat signifie que

L'addition est associative.

Cela signifie que dans une somme (de plus de deux termes), on peut déplacer, supprimer ou introduire des parenthèses sans modifier sa valeur.

Dans le langage mathématique, nous écrirons:

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{N} : \boldsymbol{(x + y) + z = x + (y + z)}$$

Remarques :

1] L'ordre dans lequel les termes ont été écrits est le même dans les deux expressions.

2] Dans une expression comprenant plusieurs signes d'opération, placer deux nombres entre parenthèses, c'est donner un ordre de priorité de calcul. Il s'agit donc de ***toujours commencer par*** effectuer les opérations placées entre ***les parenthèses***.

3] S'il n'y en a pas, par convention, les additions s'effectueront de gauche à droite.

6.2.3. L'élément neutre

Calcule

28 + 0 = …	0 + 28 = …
17 + 0 = …	0 + 17 = …
39 + 0 = …	0 + 39 = …

En ajoutant zéro à un nombre, on conserve ce nombre quel qu'il soit.

En ajoutant un nombre à zéro, on conserve ce nombre quel qu'il soit.

Nous dirons que

L'addition admet un terme neutre : 0

Dans le langage mathématique, nous écrirons:

$$\forall x \in \mathbb{N} : x + 0 = x = 0 + x$$

<u>En résumé,</u>

Dans N,

- **L'addition est commutative:**

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : x + y = y + x$$

- **L'addition est associative:**

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N} : (x + y) + z = x + (y + z)$$

- **L'addition admet un terme neutre: 0**

$$\forall x \in \mathbb{N} : x + 0 = x = 0 + x$$

<u>Utilité des propriétés</u>

Pour le calcul d'une somme de plusieurs termes, associer certains termes, peut faciliter le calcul.

Par exemple, s'il faut calculer la somme suivante:

$$150 + 0 + 45 + 50 + 15$$

Le calcul mental nous pousse à

1] négliger le terme 0

2] associer 150 et 50

3] associer 45 et 15

Si on décompose cette démarche mentale, on obtient:

150 + 0 + 45 + 50 + 15

= 150 + 45 + 50 + 15 car 0 est ....pour l'addition.

= 150 + 50 + 45 + 15 car l'addition est ....

= (150 + 50) + (45 + 15) car l'addition est ....

= 200 + 60

= 260

Exercices

Note à côté de chaque étape des calculs effectués ci-dessous, le nom de l'opération et de la propriété appliquée puis termine le calcul.

1] 34 + 69 + 11 + 66

= 34 + 66 + 69 + 11 car: ....

= (34 + 66) + (69 + 11) car: ....

= .... + ...

= ......

2] 14 + 9 + 35 + 15 + 0 + 41 + 16

= 14 + 9 + 35 + 15 + 41 + 16 car: ....

= 14 + 16 + 35 + 15 + 41 + 9 car: ....

= (..... + ...) + (..... + ...) + (..... + ...) car: ....

= ....

= ....

3] 10 + 89 + 31 + 20

= .... + ...+ ...... + ... car: ....

= (..... + ...) + (..... + ...) car: ....

= ..... + ...

= ......

Calcul d'expressions comprenant des signes d'addition et de soustraction

Rappelle-toi que dans une expression comprenant plusieurs opérations, on commence toujours par effectuer celles qui sont entre parenthèses (voir page 4). S'il n'y en a pas, par convention, les opérations se feront de gauche à droite.

Exercices

1] Dans ton cahier d'exercices, calcule les expressions suivantes en respectant la disposition de l'exemple ci-dessous.

a) 145 – 35 – 12 + 9
b) (145 – 35) – 12 + 9
c) 145 – (35 – 12) + 9
d) 145 – 35 – (12 + 9)
e) (145 – 35) – (12 + 9)
f) 29 - 13 + 7
g) 24 + 14 - 4 + 10
h) 27 - 15 + 5
i) 70 - [19 + (35 - 20)]
j) 49 - [72 + (8 + 30) - (50 + 15) - 2]

Exemple de disposition à respecter

17 – 9 + (5 + 1)
= 17 – 9 + 6
= 8 + 6
= 14

2] La calculette et les parenthèses

1. Vérifions le calcul des expressions ***a, c, i*** et ***j*** en les recopiant sur la calculette.
2. En n'utilisant que la calculette, donne la valeur de:

a) 25 - [(12 + 16) - (14 - 9)] =
b) (24,53 - 3,8) + (0,4 - 0,14) =
c) 27,9 + 0,06 + 3,14 - 6,9 =
d) 17,3 - (15,84 + 0,4) =
e) 37,67 + 0,88 - 0,09 - 28,77 =
f) 14 - 3,08 - 9,19 =
g) 25 + (68,36 - 48,7) - [17 - (25 - 8)] =
h) 36,53 - 19 - [(2,7 + 5,96 - 2,05) + 6,2 - 10] =
i) 33,14 - {(24,3 - 6,97) - [19 - (15,04 + 3,77)]} =
j) 0,2 + 0,03 + 0,004 - 0,101 =

Solutions dans l'ordre croissant :

0,133	1,06	1,73	2	9,69	14,72	16	20,99	24,2	44,66

3] Petit détour par les fractions…

Calcule les expressions suivantes dans ton cahier d'exercices.

a) $\frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$

b) $\frac{3}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) =$

c) $\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} =$

d) $\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) =$

e) $\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) =$

f) $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} =$

g) $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) =$

h) $\left[\frac{3}{4} + \left(\frac{2}{5} + 2 - \frac{3}{18}\right)\right] - \frac{1}{3} =$

i) $\frac{13}{3} - \left[2 + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{15}\right)\right] =$

Solutions dans l'ordre croissant :

$\frac{11}{12}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{103}{60}$	2	$\frac{127}{60}$	$\frac{53}{20}$

7. LA MULTIPLICATION

7.1. Vocabulaire

Multiplier 5 par 6, c'est prendre 6 fois le nombre 5 :

$$5 \times 6 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$$

L'expression mathématique 5 x 6 située à gauche du signe = s'appelle **produit de deux facteurs**. Le calcul nous a permis d'exprimer ce produit par le nombre 30.

On constate qu'un produit de deux facteurs peut être décomposé en une somme de mêmes termes :

$$a \times b = ab = \underbrace{a + a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ termes}}$$

Remarques:

On écrit souvent ***a.b*** ou ***ab*** au lieu de ***a x b*** ou encore ***6n*** au lieu de ***6 . n*** ou de ***6 x n*** (mais jamais 65 au lieu de 6 x 5).

7.2. Propriétés

7.2.1. La commutativité

Lorsqu'on écrit ***6 . 5 = 5 . 6***, on modifie l'ordre des facteurs sans modifier le produit.

5 rangées de 6 carrés = 6 colonnes de 5 carrés

Nous retiendrons dès lors, que

La multiplication est commutative.

Dans le langage mathématique, nous écrirons:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{N} : \boldsymbol{x \cdot y = y \cdot x}$$

7.2.2. L'associativité

Lorsqu'on écrit :

$$\boldsymbol{6 \cdot (5 \cdot 4) = (6 \cdot 5) \cdot 4}$$

on marque, à l'aide des parenthèses, le fait que dans le premier membre on commence par ***5 . 4***, alors que dans le second, on commence par ***6 . 5***.
Pourtant le résultat ne change pas.
En serait-il de même si on avait choisi d'autres nombres ? OUI - NON
Ces deux manières différentes de calculer le produit donnent le même résultat ; ce qui signifie que

La multiplication est associative.

Cela signifie que dans un produit (de plus de deux facteurs), on peut déplacer, supprimer ou introduire des parenthèses sans modifier le résultat.

Dans le langage mathématique, nous écrirons:

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{N} : \boldsymbol{(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)}$$

7.2.3. ***L'élément neutre***

La multiplication admet-elle un facteur neutre ? OUI - NON

Si oui,

- cite-le: ......
- illustre son existence par un exemple

...... x ...... = ... = ... x ......

Correction éventuelle

Nous dirons que

La multiplication ....

Dans le langage mathématique, nous écrirons:

7.2.4. ***L'élément absorbant***

Calcule

28 . 0 = …	0 . 28 = …
17 . 0 = …	0 . 17 = …
39. 0 = …	0 . 39 = …

On constate que le produit d'un nombre naturel et de zéro est toujours ....

Nous dirons que

La multiplication admet un facteur absorbant : 0

Dans le langage mathématique, nous écrirons:

$\forall x \in \mathbb{N} : x \,.\, 0 = 0 = 0 \,.\, x$

En résumé,

En imitant le cadre de la page 16, recopie les propriétés de la multiplication en L.L. et en L.M.

-
-
-
-

Utilité des propriétés

Pour le calcul d'un produit de plusieurs facteurs, associer certains facteurs, peut faciliter le calcul.
Par exemple, s'il faut calculer le produit suivant:

4 . 8 . 25 . 125 . 1 . 3

Le calcul mental nous pousse à

1] négliger le facteur 1

2] associer 4 et 25

3] associer 8 et 125

Si on décompose cette démarche mentale, on obtient:

4 . 8 . 25 . 125 . 1 . 3

= 4 . 8 . 25 . 125 . 3 car 1 est le ....pour la multiplication.

= 4 . 25 . 8 . 125 . 3 car la multiplication est ....

= (4 . 25) . (8 . 125) . 3 car la multiplication est ....

= 100 . 1000 . 3

= 300 000

Exercices

1] Note à côté de chaque étape des calculs effectués ci-dessous, le nom de l'opération et de la propriété appliquée puis termine le calcul.

a) 5 . 16 . 2

= 5 . 2 . 16 car: ....

= (5 . 2) . 16 car: ....

= ....

= ......

b) 2 . 4 . 5 . 25

= 2 . 5 . 4 . 25 car: ....

= (2 . 5) . (4 . 25) car: ....

= ....

= ......

c) 56 . 19 . 45 . 0 . 87

= .... car: ....

2] Calcule mentalement et inscris directement la réponse.

a) 2 . 6 . 5 . 8 =

b) 3 . 17 . 0,5 . 2 =

c) 0,25 . 50 . 40 . 0,1 =

d) 0,48 . 5,89 . 0 . 8,2 =

e) 0,002 . 25 . 1000 . 4 =

f) 35 . 0,1 . 2 =

g) 0,8 . 0,5 . 0,2 =

h) 0,1 . 0,1 . 1 . 100 =

Cas particulier : ***<u>les puissances</u>***

8. L'EXPONENTIATION

8.1. Vocabulaire

Quand on a un produit de facteurs identiques comme, par exemple : 5 x 5 x 5, on convient de l'écrire sous une forme abrégée : 5^3

L'expression mathématique 5^3 s'appelle **la troisième *puissance* de cinq**.

Dans l'expression 5^3 :

- 5 est appelé **base** de la puissance
- 3 est appelé l'**exposant**.

Ecris les produits suivants sous forme de puissance sans les calculer.

3 x 3 x 3 x 3 =

6 x 6 x 6 x 6 x 6 =

5 . 5 =

2 . 2 . 2 . 2 . 2 =

x . x . x . x . x . x = (***x*** représente n'importe quel nombre naturel)

Complète le tableau ci-dessous.

Bases	Exposants	Puissances
7	2	
		8^4
		9^3
		10^5
a	2	
6	***n***	
x	***n***	

x^n représente la $n^{ième}$ puissance du nombre *x*.

Ecris les résultats des opérations suivantes sous la forme d'une puissance de 5 :

$5^7 . 5 =$	$5^7 . 5^2 =$	$5^7 . 5^3 =$	$5^7 . 5^4 =$	$5^7 . 5^5 =$	$5^7 . 5^6 =$	$5^7 . 5^7 =$
$5^7 : 5 =$	$5^7 : 5^2 =$	$5^7 : 5^3 =$	$5^7 : 5^4 =$	$5^7 : 5^5 =$	$5^7 : 5^6 =$	$5^7 : 5^7 =$

Complète les égalités suivantes :

$5^7 = 5^6 . \ldots$	$5^7 = 5^5 . \ldots$	$5^7 = 5^4 . \ldots$	$5^7 = 5^3 . \ldots$	$5^7 = 5^2 . \ldots$	$5^7 = 5 . \ldots$	$5^7 = 5^0 . \ldots$
$7^2 = 7^8 : \ldots$	$7^2 = 7^7 : \ldots$	$7^2 = 7^6 : \ldots$	$7^2 = 7^5 : \ldots$	$7^2 = 7^4 : \ldots$	$7^2 = 7^3 : \ldots$	$7^2 = 7^2 : \ldots$

Généralisation - Définition

$$\forall\, x, n \in \mathbb{N} : \quad x^n = \underbrace{x.x.x.\ \dots\ .x}_{n \text{ facteurs}}$$

où x représente la base de la puissance x^n

et n représente l'exposant de la puissance x^n

Remarquons que:

1) Si $n = 1$, alors x^1 = ...

2) Si $n = 0$, alors x^0 = ...

Décompose et calcule.

4^2 = ...

3^3 = ...

2^6 = ...

10^2 = ...

1^3 = ...

0^4 = ...

8^1 = ...

100^4 = ...

8.2. Propriétés

Voir page 24.

9. LA SOUSTRACTION

9.1. Vocabulaire

L'expression mathématique 30 - 6, s'appelle **différence** de deux **termes**. Le calcul nous a permis d'exprimer cette différence par le nombre ....

Définition:

On appelle **différence de deux termes**, le nombre qu'il faut ajouter au plus petit pour obtenir le plus grand.

9.2. Propriétés

Voir page 24.

10. LA DIVISION

10.1. Vocabulaire

Pour se rendre à Walibi, les 300 élèves de première et leurs douze titulaires louent des autocars. Chaque car peut accueillir 52 passagers. Combien de cars devra-t-on réserver ?

....

Dans l'expression .... **:** .... = ...,

- le premier nombre s'appelle le **dividende**,
- le deuxième nombre s'appelle le **diviseur**,
- le troisième nombre s'appelle le **quotient**.

L'écriture 312 **:** 52 exprime aussi le quotient de 312 par 52.

10.2. Propriétés

Voir page 24.

En résumé:

A partir de deux nombres, il est possible d'en trouver un troisième; il suffit pour cela de se fixer une règle, c'est-à-dire l'opération qui nous permettra de le trouver.

C'est ainsi que:

Par exemple,	Pour l' <u>addition</u>	Pour la <u>multiplication</u>	Pour l' <u>exponentiation</u>	Pour la <u>soustraction</u>	Pour la <u>division</u>
20 et 5 donneront	25 (20 + 5)	100 (20 x 5)	3 200 000 20^5	15 (20 - 5)	4 (20 : 5)
20 s'appellera:	terme	facteur	base	terme	dividende (*)
5 s'appellera:	terme	facteur	exposant	terme	diviseur (*)
Le résultat est	la somme des termes 20 et 5	le produit des facteurs 20 et 5	la 5e puissance de 20	la différence des termes 20 et 5	le quotient des nombres 20 et 5

(*) Le dividende et le diviseur sont aussi appelés **1er terme** et **2e terme** de la division.

11. SYNTHESE SUR LES PROPRIETES DES OPERATIONS

Nous avons vu que les propriétés de l'addition s'appliquaient à la multiplication. S'appliquent-elles aux autres opérations ?

Propriétés \ Opérations		<u>Addition</u>	<u>Soustraction</u>	<u>Multiplication</u>	<u>Exponentiation</u>	<u>Division</u>
Commutativité	*Oui / Non*	OUI				
	L.M. ou contre-exemple	$x + y = y + x$				
Associativité	*Oui / Non*	OUI				
	L.M. ou contre-exemple	$(x+y)+z = x+(y+z)$				
Neutre	*Oui / Non*	OUI				
	L.M. ou contre-exemple	$x + 0 = x = 0 + x$				
Absorbant	*Oui / Non*	NON				
	L.M. ou contre-exemple	/				

Remarque : x ; y et z représentent des nombres naturels.

12. MULTIPLICATION - ADDITION - SOUSTRACTION

Explique comment tu procèdes pour effectuer ces calculs :

Calculs	***Procédés***
3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 7 =	
5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 6 + 6 =	
4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 9 + 9 + 9 =	

Dans les trois cas, le bon sens a voulu que tu transformes la (les) sommes de termes identiques en un (des) produit(s) et que tu commences par effectuer ce(s) produit(s) avant le reste de la somme.

Par convention, nous adopterons cette règle.

Exemples

1] Trouve le calcul représentant la situation suivante:

Je veux acheter une voiture, mais n'ayant pas suffisamment d'argent, je verse un acompte de 2500 € et accepte de verser 450 € pendant 30 mois.

Note l'expression qui représente le montant à payer. .... €

Note ce montant. = ... €

2] Soit à calculer $5 + 2 . 3$.

D'après notre convention,

$$\begin{aligned} & 5 + 2 . 3 \\ = \ & 5 + 6 \\ = \ & 11 \end{aligned}$$

Seule la présence de parenthèses nous oblige à procéder autrement.

Exemple:

Introduisons des parenthèses dans l'expression précédente comme suit:

$$\begin{aligned} & (5 + 2) . 3 \\ = \ & 7 . 3 \\ = \ & 21 \end{aligned}$$

3] Soit à calculer ... $(2 + 3) . 4 + 3 . 5 - 17$

- Effectue d'abord les parenthèses et recopie le reste de l'expression. =
- Effectue ensuite les multiplications. =
- Effectue ensuite l'addition. =
- Effectue enfin la soustraction. =

<u>Méthode de calcul des expressions</u> **(Priorités opératoires)**

Par convention, à ce stade de la matière, nous calculerons d'abord

1. **les parenthèses**
2. **les produits**
3. **les sommes et les différences de gauche à droite**

Exercices:

1] Dans ton cahier d'exercices, calcule les expressions suivantes en respectant la disposition ci-dessus.

a) $(17 + 6) . 3 + 4$

b) $(17 + 6) . (3 + 4)$

c) $17 + 6 . 3 + 4$

d) $17 + 6 . (3 + 4)$

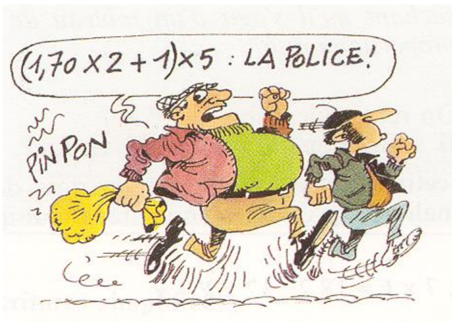
e) $17 + (6 . 3 + 4)$

f) $(17 + 6 . 3) + 4$

2] Les exercices ci-dessus ont été écrits avec les mêmes nombres et les mêmes opérations placés dans le même ordre.

- Les résultats obtenus sont-ils les mêmes ? OUI - NON
- Pourquoi ? ....

....



3] Dans ton cahier d'exercices, calcule les expressions suivantes en respectant les priorités opératoires et la disposition conventionnelle.

a)	6 . 7 + 14	f)	(38 + 2) - (20 - 3)
b)	9 . (18 + 2)	g)	38 + 2 - 20 - 3
c)	49 - (7 + 3) . 2	h)	4 . 5 - 3 . 2
d)	17 - 2 . 4	i)	3 . 8 - 2 - 3 . 3
e)	(8 + 31) . 3	j)	16 - 8 . 2 + 7

k) (98 - 5) - 3 . (19 + 8)

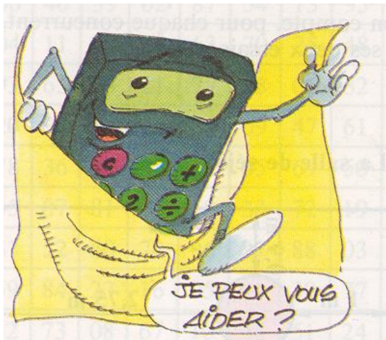
l) 7 . (7 - 2) + [(9 + 2) - 2 . (8 - 5)]

m) 7 - 4 + [22 - (8 + 6)] . 3

n) 325 - (10 + 15) . (17 - 4)

o) 17 + (8 + 4) + 7 . [3 . (2 + 4)]

4] <u>La calculette et les priorités opératoires</u>



1. Vérifie le calcul des expressions ***h*** et ***n***
2. En utilisant la calculette, donne la valeur de:

a) 100 - [7 . (2 + 1) . 4] - 2 . 5 =

b) (37,5 + 12,5) . 2 - (1,75 + 4,25) . 2 =

c) 0,2 . (31,412 + 19,088) =

d) 3 . [(2,5 + 1) - 7 . 0,5] + [15 - (8 - 2)] . 0,3 =

e) 17 - 3 . [(10 - 8,42) + (3,7 - 2,8) . 0,5] + 3 . (2 - 0,7) =

Solutions dans l'ordre croissant :

2,7	6	10,1	14,81	16,32	88

5] Dans ton cahier d'exercices, calcule les expressions suivantes en respectant les priorités opératoires et la disposition conventionnelle.

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$

b) $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) =$

c) $2 \cdot \frac{3}{5} - 3 \cdot \frac{2}{9} =$

d) $\frac{19}{5} - \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\right) \cdot 2 =$

Solutions dans l'ordre croissant :

$\frac{14}{75}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{22}{15}$

13. LES PUISSANCES ET LES PRIORITES OPERATOIRES

Soit à calculer

$$28 - 2^3 \cdot 3 + (1 + 3^2) + (9 - 5)^2$$

La règle nous impose de calculer les expressions entre parenthèses en donnant priorité aux produits par rapport aux sommes et aux différences. Il est évident que ces calculs ne seront possibles que si les différents termes et facteurs sont connus. C'est pourquoi nous devrons d'abord calculer les puissances. Cela signifie, qu'à ce stade de la matière, nous calculerons d'abord:

1. **les parenthèses**
2. **les puissances**
3. **les produits**
4. **les sommes et les différences de gauche à droite**

Résolvons notre exemple pour bien comprendre sa résolution.

$28 - 2^3 \cdot 3 + (1 + 3^2) + (9 - 5)^2$	
$= 28 - 2^3 \cdot 3 + (1 + \mathbf{9}) + (9 - 5)^2$	Calcul de puissance dans les parenthèses
$= 28 - 2^3 \cdot 3 + \mathbf{10} + \mathbf{4}^2$	Calcul des parenthèses
$= 28 - \mathbf{8} \cdot 3 + 10 + \mathbf{16}$	Calcul des puissances
$= 28 - \mathbf{24} + 10 + 16$	Calcul du produit
$= \mathbf{4} + 10 + 16$	Calcul des différences et
$= \mathbf{30}$	des sommes de gauche à droite

Exercices

Dans ton cahier d'exercices, calcule les expressions ci-dessous.

a) $8 + 3^2 \cdot 5 - 7 \cdot 7$

b) $5 + 2 \cdot 6 + 5 \cdot (8 - 3 \cdot 2)^3$

c) $3 \cdot 8^2 - 2 \cdot (3 + 2)^2 - (2 \cdot 5)^2$

d) $(4 \cdot 2)^2 + (2 + 3^2)^2 - 6 \cdot (10 + 2 \cdot 3 - 4)$

e) $(2^3 + 3^2)^2 - 6^2$

f) $10^3 - 10^2 \cdot 5 - 6 \cdot (4 \cdot 2 + 12)$

La calculette et les puissances

Vérifie le calcul des expressions c et e.

En n'utilisant que la calculette, calcule

1) $(6 + 4) \cdot 2 + 3^2 \cdot 2 =$
2) $4^3 - (3 + 2)^2 - 3 \cdot 7 =$
3) $(4 + 2)^2 \cdot 3^2 - (4 - 1)^3 =$
4) $10^2 + 4^2 \cdot 5^2 - (6 + 5)^2 =$
5) $8 + 4^2 \cdot 5 + 17 \cdot (2^3 - 7) =$

Solutions dans le désordre : **18, 38, 105, 184, 297** et **379**.

14. ANALYSE D'EXPRESSIONS MATHEMATIQUES

Rappel:

$8 + 2$	est une somme de deux termes
$8 - 2$	est une différence de deux termes
$8 \,.\, 2$	est un produit de deux facteurs
8^2	est une puissance

Que dire des expressions telles que $8 + 2 \,.\, 3$, $8 + 2^4$ ou $8 + 3 \,.\, 2^4 - 7$?

- Soit l'expression $8 + 2 \,.\, 3$

L'ordre des priorités opératoires nous impose son calcul comme suit:

$$\begin{aligned} & 8 + 2 \,.\, 3 \\ = \;& 8 + 6 \qquad \text{(priorité au produit)} \\ = \;& 14 \end{aligned}$$

L'expression $8 + 2 \,.\, 3$ comprend trois nombres mais **l'opération qui englobe ces trois nombres** ... - n'est pas « . » car on ne multiplie que 2 et 3.
- est « + » car on additionne 8 à 6 $(6 = 2 \,.\, 3)$

→ C'est pourquoi, on dira que $8 + 2 \,.\, 3$ est une somme de deux termes.

Exemple d'analyse n°1

$8 + 2 \,.\, 3$ → somme de 2 termes

- 1er terme : 8
- 2e terme : $2 \,.\, 3$ → produit de 2 facteurs
  - 1er facteur : 2
  - 2e facteur : 3

- Soit l'expression $(8 + 2) \,.\, 3$

L'ordre des priorités opératoires nous impose son calcul comme suit:

$$\begin{aligned} & (8 + 2) \,.\, 3 \\ = \;& 10 \,.\, 3 \qquad \text{(priorité aux parenthèses)} \\ = \;& 30 \end{aligned}$$

L'expression $(8 + 2) \,.\, 3$ comprend trois nombres mais **l'opération qui englobe ces trois nombres** ... - n'est pas « + » car on n'additionne que 8 et 2.
- est « . » car on multiplie 10 et 3.

→ C'est pourquoi, on dira que $(8 + 2) \,.\, 3$ est un produit de 2 facteurs.

Exemple d'analyse n°2

(8 + 2) . 3 → produit de 2 facteurs

- 1er facteur : 8 + 2 → somme de 2 termes
  - 1er terme : 8
  - 2e terme : 2
- 2e facteur : 3

• Calcule l'expression suivante:

$(5 + 4 \,.\, 2^3) - 30$

=

=

= La soustraction englobe tous les nombres, d'où:

=

Exemple d'analyse n°3

$(5 + 4 \,.\, 2^3) - 30$ → différence de deux termes

- 1er terme : $5 + 4 \,.\, 2^3$ → somme de 2 termes
  - 1er terme : 5
  - 2e terme : $4 \,.\, 2^3$ → produit de 2 facteurs
    - 1er facteur : 4
    - 2e facteur : 2^3 → puissance
      - base : 2
      - exposant :3
- 2e terme : 30

Exercices

Dans ton cahier d'exercices, analyse les expressions suivantes sans les calculer.

1] $17 - (15 - 8)$

2] $2 \,.\, 7 + 3 \,.\, 9$

3] $5 \,.\, (6 + 3 \,.\, 8)$

4] $1 + (8 \,.\, 5 - 7) \,.\, 10$

5] $35 - 24$

6] $6 - 3 \,.\, 7^2$

7] $3^2 - (5 + 6 \,.\, 3)^4$

8] $5 + 6 + 7 + 8$

9] $3 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 6$

10] $5 + 2^3 + (40 - 2^5)$